INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

ESCUELA SUPERIOR DE FíSICA Y MATEMÁTICAS

25° CONCURSO NACIONAL DE MATEMÁTICAS PIERRE FERMAT

GUÍA 2023 TODOS LOS NIVELES

Concurso Nacional Pierre Fermat 2023

Escuela Superior de Física y Matemáticas del I.P.N.

PRESENTACIÓN

Antecedentes

El concurso de matemáticas Pierre Fermat, nace a instancias de un grupo de estudiantes de la ESFM, que, habiendo participado en olimpiadas de matemáticas, pensaron en un evento semejante para la ESFM, estos estudiantes Ernesto Lupercio Lara. José Luis Flores Silva, Luis Cruz Romo, entre otros, piden y logran que las autoridades de la ESFM, organicen el concurso pensado por ellos. De esta manera nace en 1990, el primer Concurso de Matemáticas Pierre Fermat, coordinado y fuertemente apoyado por el Profesor Fabio Dávila Ojeda y por el estudiante Francisco Zaragoza Martínez. Así pues, este concurso, comienza localmente para estudiantes de ESFM y algunos otros de nivel medio superior y secundaria que se logró captar. Además, el concurso está fuertemente influenciado por las olimpiadas de matemáticas. Este grupo de estudiantes y profesores se disgrega en 1996, dando con ello término a la primera época del concurso. En la segunda época del concurso que da inicio en 2002, se le da el carácter de nacional al abrirse a estudiantes de toda la república y al eliminarse las restricciones en cuanto a edad de los concursantes. Se le desvincula de las olimpiadas, se introducen nuevos temas para evaluar a los concursantes y se eliminan los problemas "tipo olimpiada", obteniendo así un concurso propio de la ESFM. Actualmente el concurso Nacional de Matemáticas Pierre Fermat es parte de la "huella académica" de la ESFM y es un instrumento útil para evaluar el estado que guarda la educación matemática en México.

Objetivo

La ESFM, preocupada por la poca preparación matemática básica de la que hacen gala algunos alumnos de nuevo ingreso al IPN, se ha dado a la tarea de organizar el concurso Pierre Fermat, persiguiendo entre otros objetivos, el despertar el amor por las matemáticas en los estudiantes, captar alumnos y tener un patrón de referencia de la educación matemática en México.

Población

El concurso Pierre Fermat contempla tres categorías: Nivel Secundaria, Nivel Medio Superior y Nivel Superior.

Concurso Nacional Pierre Fermat 2023

Escuela Superior de Física y Matemáticas del I.P.N.

REGISTRO

El concurso consta de tres niveles

Secundaria, Medio Superior y Superior.

Requisitos

1. Estar inscrito en cualquier escuela pública o privada del pais.

2. El nivel inscrito en su escuela debe coincidir con el nivel en el que participarán en el concurso, por lo que se debe presentar un comprobante de estudios vigente (credencial o constancia) al momento de presentarse a la fase eliminatoria. En caso de estar en etapa de transición de un nivel a otro (secundaria - medio superior, medio superior - superior) presentará examen en el nivel que estaban en el momento de registrarse.

Etapas del concurso

1. **Registro:** 11 de mayo al 23 de junio de 2023 en https://www.esfm.ipn.mx/pierre-fermat.html

2. **Eliminatoria:** 1 de julio de 2023, a las 10:00 a.m. en todas las sedes. Consiste de un examen de 25 a 30 preguntas de opción multiple con un tiempo límite de 3 horas. Aquellos que obtengan mejor calificación pasarán a la siguiente etapa.

3. **Final:** 2 de septiembre de 2023 a las 10:00 a.m. en la ESFM - IPN. Consiste de un examen de cinco preguntas abiertas con un tiempo límite de 4 horas.

4. **Premiación:** 17 de noviembre de 2023 a las 12:00 p.m. en el Auditorio "Víctor Flores Maldonado"de la ESFM-IPN.

Todos los concursantes recibirán diploma de participación después de la etapa eliminatoria. Los ganadores obtendrán diploma y un presente de nuestros patrocinadores. También se otorgarán menciones honoríficas a aquellos cuyas soluciones hayan sido destacadas.

La inscripción es gratuita, sólo se realizará de manera electrónica y no habrá prórroga al periodo definido.

Concurso Nacional Pierre Fermat 2023

Escuela Superior de Física y Matemáticas del I.P.N.

Guía para Nivel Secundaria

Problemas

1. Considere los conjuntos $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 7\}$, $B = \{\Box,\ \Diamond,\ \bigcirc,\ \bowtie\}$, $C = \{1,\ \Box,\ 3,\ \Diamond,\ 5\}$ y $D = \{2,\ \bigcirc,\ 5,\ \bowtie,\ 7\}$. ¿Cómo está dado el conjunto

$$((A \setminus B) \cup [(C \cap A) \setminus (D \cup B)]) \cap D?$$

   (a) $\{3,\ 5,\ 7\}$ (b) $\{1,\ 5,\ 7\}$ (c) $\{2,\ 5,\ 7\}$ (d) $\{2,\ 3,\ 7\}$

2. ¿Cuál es el resultado de realizar la siguiente operación de números

$$2\,\frac{1}{3} - \frac{7}{8} + 5 - 0.37?$$

   (a) $6\frac{49}{600}$ (b) $6\frac{51}{600}$ (c) $6\frac{53}{600}$ (d) $6\frac{55}{600}$

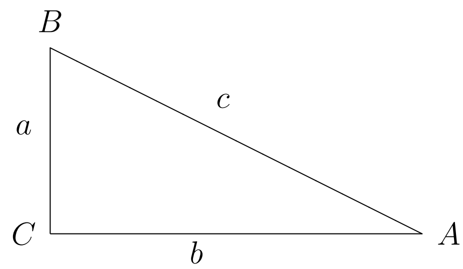
3. Considere la secuencia de números: 0.2, 0.25, 0.250, 0.2509, 0.25096, 0.250969, 0.2509694, 0.25096943,... ¿Cuál es el número que sigue en la secuencia establecida?

   (a) 0.250969430 (b) 0.250969431 (c) 0.250969432 (d) 0.250969433

4. Considere el número $0.0123012301230123\cdots$. ¿Qué dígito debe aparecer en el lugar posicional 10^{-25}?

   (a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3

5. Sea $\triangle ABC$ un triángulo rectángulo como se muestra en la figura de abajo, en el cual la razón de las medidas a y b de sus catetos es de $3/4$, de perímetro 15 unidades y de área $75/8$ unidades cuadradas. ¿Cuáles son las dimensiones de los lados del triángulo rectángulo?



(a) $a = 5\ u$, $b = 15/4\ u$, $c = 25/4\ u$ (b) $a = 15/4\ u$, $b = 5\ u$, $c = 25/4\ u$

(c) $a = 25/4\ u$, $b = 5\ u$, $c = 15/4\ u$ (d) $a = 15/4\ u$, $b = 25/4\ u$, $c = 5\ u$

6. ¿Cuál es el valor de $\cos(60°)$ y el de $\text{sen}(60°)$, respectivamente?

(a) $-\frac{1}{2}$ y $-\frac{3}{2\sqrt{3}}$, (b) $-\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{2\sqrt{3}}$ (c) $\frac{1}{2}$ y $-\frac{3}{2\sqrt{3}}$ (d) $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{2\sqrt{3}}$

7. ¿Cuál es la ecuación de la recta que pasa por el origen y tiene un ángulo de 30° con respecto al eje x?

(a) $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}\,x$ (b) $y = \frac{\sqrt{3}}{2}\,x$ (c) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}\,x$ (d) $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}\,x$

8. Una madre de familia gasta en uno de esos días de compras el 10 % de tortillas, 20 % en verduras, 30 % en pastas y 50 % en pollo de su gasto. Si tenía \$500.00 antes de ir a sus compras, y le sobró \$57.00, ¿cuánto gastó en el pollo?

(a) \$221.50 (b) \$222.00 (c) \$222.50 (d) \$223.00

9. Sea C un círculo de perímetro P unidades, y de área A unidades cuadradas. Entonces, el área del círculo C es directamente proporcional al cuadrado de su perímetro. ¿Cuál es la relación que debe de cumplirse?

(a) $A = 2\pi P^2$ (b) $A = \frac{1}{2\pi}P^2$ (c) $A = 4\pi P^2$ (d) $A = \frac{1}{4\pi}P^2$

10. Si $a^2 + b^2 = 25$ y $ab = 12$, ¿Cuál es el valor de $a + b$?

(a) ± 7 (b) 0 (c) 5 o -8 (d) 49

11. Usando la fórmula del coseno del ángulo medio calcule el $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ sabiendo que $\cos(\theta) = \frac{2}{5}$

(a) $-\sqrt{\frac{7}{20}}$ (b) $-\sqrt{\frac{7}{10}}$ (c) $\sqrt{\frac{7}{10}}$ (d) $\sqrt{\frac{7}{20}}$

12. Dos números enteros n y m satisfacen que la suma de n con el doble de m es 4, y el producto del triple de n con m es 6. Encuentre los enteros n y m

    (a) $m = 2$, $n = 2$ (b) $m = 1$, $n = 1$ (c) $m = 2$, $n = 1$ (d) $m = 1$, $n = 2$

13. Eduardo tiene 456 monedas. Cinco duodécimos de ellas son de \$1, tres duodécimos de \$5, y el resto de \$10. ¿Cuántos pesos tiene Eduardo?

    (a) 1072 (b) 2010 (c) 972 (d) 2280

14. Calcula la distancia del punto $(3, 2)$ a la recta que tiene por ecuación $y = 3 - 2x$.

    (a) $4/\sqrt{5}$ (b) $\sqrt{5}$ (c) 2 (d) 2,449489

15. ¿Cuál es la función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$ que corresponde a la gráfica de la Figura 1?

    (a) $y = 2x^2+3x+3$ (b) $y = x^2+3x+3$ (c) $y = x^2+2x+3$ (d) $y = 2x^2+2x+4$

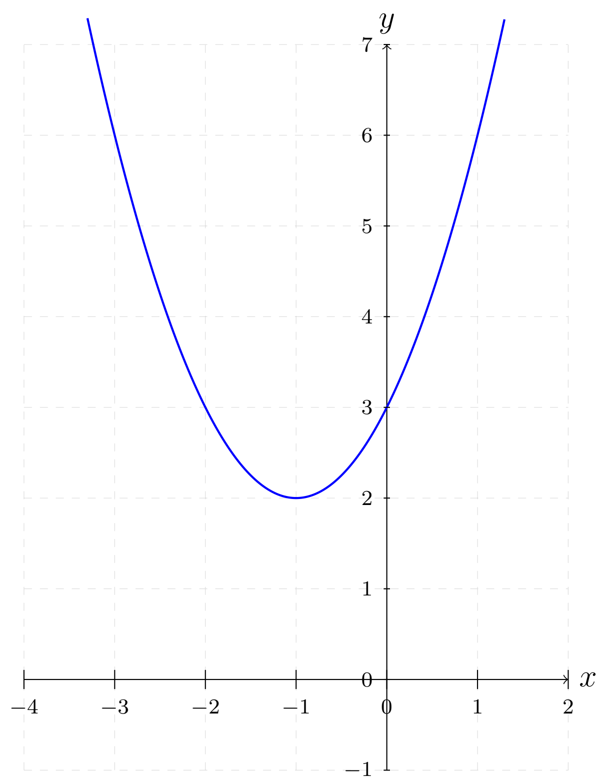


Figura 1: Grafica para el Problema 15

16. Calcular la altura de una torre si se sabe que su sombra mide 477 metros cuando los rayos solares forman un ángulo de 30°.

    (a) 477 m (b) $\frac{477}{2}$ m (c) $159\sqrt{3}$ m (d) $\frac{477\sqrt{3}}{2}$ m

17. Encuentra la longitud de los lados del cuadrado que se indica en la Figura 2

    (a) 13 (b) $\frac{60}{7}$ (c) 7,5 (d) $\frac{70}{9}$

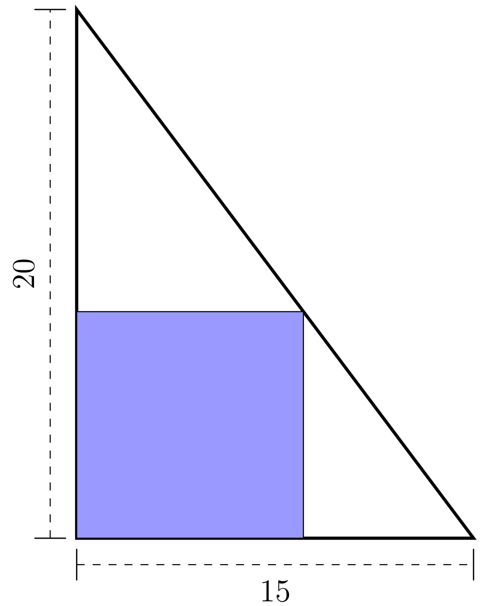


Figura 2: Gráfica para el Problema 17

18. El triángulo de la Figura 3 es equilátero con longitud de sus lados igual a 25 unidades. Si dividimos al triángulo con una línea perpendicular a su base (linea punteada) y formamos un rectángulo cuya base es paralela a la del triángulo equilátero. ¿Cuál es el área del triángulo marcado si su base mide 6 unidades?

    (a) $18\sqrt{3}$ (b) 9 (c) $36\sqrt{3}$ (d) 12,5

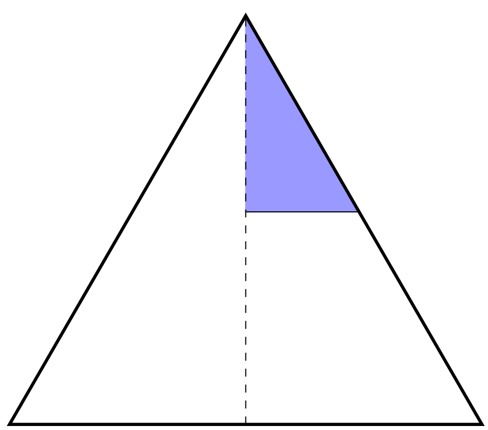


Figura 3: Gráfica para el Problema 18

19. Una población de bacterias crece el doble cada día, mientras que a lo largo del día lo hace de manera uniforme cada hora. Si para el décimo día hay un total de 3024 bacterias.¿Cuánto tiempo habrá pasado si el total de la población es 17640?

    (a) Dos días con once horas (b) Doce días con once horas

    (c) Cincuenta y ocho días con veinte horas (d) Cinco días con veinte horas

20. Dado un número natural n, se construye para cada z número entero el conjunto

$$[z] := \left\{ x \in \mathbb{Z} \ : \ \frac{z-x}{n} \in \mathbb{Z} \right\}.$$

¿Cuál es la cardinalidad del conjunto $\{[z] \ : \ z \in \mathbb{Z}\}$?.

(a) Igual a la cardinalidad de $\mathbb{Z}$ (b) Igual a la cardinalidad de $\mathbb{N}$

(c) Exactamente igual a n (d) No se puede contar el número de elementos

21. Tomando el conjunto $F = \{0, 1, 2\}$, se define una suma y una multiplicación por las siguientes tablas:

$+$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

$\times$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

Calcular el cociente y residuo de la división del polinomio x^{10} entre $x^7 + 2x^4 + x + 1$.

(a) Cociente: $x^3 + 1$; Residuo: $2x^3 + 2x + 2$

(b) Cociente: $x^3 - 2$; Residuo: $3x^4 - x^3 + 2x + 2$

(c) Cociente: $x^3 + 2$; Residuo: $x^3 + 2x + 2$

(d) Cociente: $x^3 + 1$; Residuo: $x^3 + 2x + 2$

22. ¿Cuál es el valor de

$$\alpha = \frac{1}{\cos\left(\frac{1}{7}\pi\right)\cos\left(\frac{3}{7}\pi\right)\cos\left(\frac{5}{7}\pi\right)}?$$

(a) $\alpha = \dfrac{1}{2}$ $\alpha = \sqrt{2}$ (c) $\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (d) $\alpha = 2$

23. Un triángulo cuyos ángulos son A, B, C, satisface que B es el triple del ángulo A y C es una sexta parte de B. ¿Cuáles son los valores de los ángulos?

(a) $A = \dfrac{2\pi}{9}$; $B = \dfrac{2\pi}{3}$; $C = \dfrac{\pi}{9}$. (b) $A = 120°$; $B = 40°$; $C = 20°$.

(c) $A = \dfrac{2\pi}{3}$; $B = \dfrac{2\pi}{9}$; $C = \dfrac{\pi}{3}$. (d) $A = 20°$; $B = 60°$; $C = 100°$.

24. Tómese el conjunto A como la colección de todos lo números naturales, $B := \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, C la colección de los números naturales pares mayores que 10 y D todos números naturales multiplos de 5. Calcular el resultado de la operación

$$(B \cap (A \setminus (C \cap D)) \cup \{1\}.$$

(a) B (b) A (c) $\emptyset$ (d) C

25. Una linea recta de longitud 1 es divida en tres porciones de igual tamaño, la sección del centro es removida y remplazada por dos rectas de igual longitud a las que se preservaron pero con la izquierda tendrá una rotación de 60 grados, mientras que la segunda un rotación de -60 grados. Este proceso se repite en cada una de las porciones de la recta, como se muestra en la Figura 4. ¿Cuál es una formula para la longitud de la figura después de repetir el proceso n veces y cual será la longitud de la figura si se repite infinitas veces?

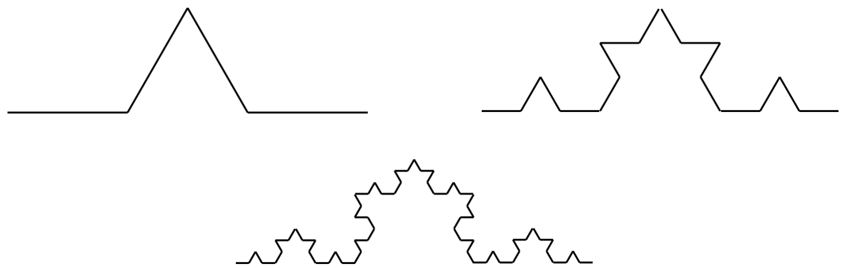


Figura 4: Ejemplo del Ejercicio 25.

(a) $\left(\frac{3}{4}\right)$ y 0 $\quad$ (b) $\frac{4}{3}n$ e ∞ $\quad$ (c) $\left(\frac{4}{3}\right)^n$ e ∞ $\quad$ (d) $\frac{3}{4}n$ y 1

Concurso Nacional Pierre Fermat 2023

Escuela Superior de Física y Matemáticas del I.P.N.

Guía para Nivel Medio Superior

Problemas

1. En cierta escuela de ciencias, 80 alumnos están inscritos en Geometría I, 90 en Cálculo I y 55 en Álgebra I. De este total de alumnos, 32 de ellos cursan Geometría I y Cálculo I, 23 cursan Cálculo I y Álgebra I, 16 cursan Geometría y Álgebra I, 8 se encuentran cursando las tres materias. ¿Cuál es el número total de alumnos inscritos en las tres materias?

   (a) 200 (b) 225 (c) 162 (d) 175

2. Para probar la tierra, el Dios Brahma, dió nacimiento a un número determinado de hijos e hijas, los cuales fueron el origen de las castas de la India. Encontrar el número de castas. Sabiendo que es igual al número de hijos, que la diferencia entre el número de hijos e hijas es 1 y que la diferencia entre los cuadrados del número de hijos e hijas es 7.

   (a) 3 hijas, 4 hijos, 4 castas (b) 10 hijas, 11 hijos, 9 castas
   (c) 2 hijas, 3 hijos, 3 castas (d) Ninguna de las opciones anteriores

3. Si a es un número real, ¿Cuál es el desarrollo de $(a+\sqrt{a^2-1})^7+(a-\sqrt{a^{-}1})^7$?

   (a) $2a(64a^6-112a^4+56a^2-7)$ (b) $64a^7-112a^5+56a^3-7$
   (c) $64a^7-128a^5+64a^3-8$ (b) Ninguna de las opciones anteriores

4. Encontrar todos los números reales r, para los cuales el polinomio cuadrático

   $$p(x)=(r^2-1)^2x^2+2(r-1)x+1,$$

   sea estrictamente positivo.

   (a) Para todo r (b) $r\geq 0$ (c) $r\geq 1$ (d) $r\geq -\dfrac{1}{4}$

5. Para que valores de x se cumple la siguiente desigualdad

   $$|x+2|-|2x+1|>1$$

   (a) $x>0$ (b) $\left(-\dfrac{2}{3},1\right)$ (c) Para ningún valor de x (d) Ninguna de las anteriores

6. Resolver la siguiente ecuación

   $$\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}-\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}=8x\sqrt{x^2-3x+2}$$

   (a) $x=1$ y $x=2$ (b) $x=1$ y $x=3$ (c) $x=0$, $x=2$ (d) No tiene solución

7. Hallar la solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \log(x^2+y^2) = 2 - \log 5 \\ \log(x+y) + \log(x-y) = \log(1{,}2) + 1 \end{cases}$$

(a) $(4,2),(2,4)$ (b) $(4,2),(4,-2)$ (c) $(1,2),(4,-4)$ (d) $(4,5),(-2,3)$

8. Una escalera se apoya en una pared vertical, formando un ángulo θ con la horizontal y su punto más alto está a $4\sqrt{3}$ metros de altura respecto al suelo. Cuando el ángulo dusminuye $15°$ el punto más alto de la escalera queda a $2\sqrt{6}$ metros de altura. ¿Cuál es la longitud de la escalera?

(a) $4\sqrt{6}$ metros (b) $3\sqrt{13}$ metros (c) $4\sqrt{8}$ metros (d) $3\sqrt{6}$ metros

9. Si T es un triángulo con vértices en $O(0,0)$, $P(x_1,y_1)$ y $Q(x_2,y_2)$, entonces su área esta dada por la fórmula

(a) $\frac{1}{2}(x_2y_2 - x_1y_1)$ (b) $\frac{1}{2}(x_1x_2 - y_1y_2)$ (c) $\frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1)$

(d) Ninguna de las opciones anteriores

10. Sean $P(x_1,y_1)$, $Q(x_2,y_2)$ y $R(x_3,y_3)$ tres puntos en el plano cartesiano y

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

¿ Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

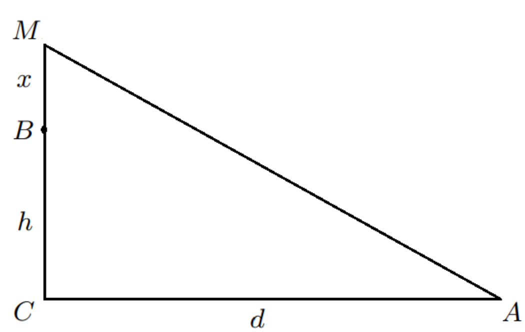
(a) Si $\Delta > 0$, los tres puntos son los vértices de un triángulo y su área es igual a Δ

(b) Si $\Delta = 0$, los tres puntos son colineales

(c) Si $\Delta < 0$, los tres puntos forman un triángulo y su área es igual a $-\Delta$

(d) Ninguna de las opciones anteriores

11. En el triángulo rectángulo de la figura, la hipótesis es que $\overline{BM} + \overline{MA} = \overline{BC} + \overline{CA}$.



Si $\overline{MB} = x, \overline{CB} = h, \overline{CA} = d$, entonces x mide:

(a) $\dfrac{hd}{2h+d}$ (b) $d-h$ (c) $h+d-\sqrt{2d}$ (d) $\sqrt{h^2+d^2}-h$

12. Una pieza circular metálica de máximo tamaño se corta de una pieza cuadrada, y enseguida se corta de la pieza circular otro cuadrado de máximo tamaño. La cantidad total de metal desperdiciado es:

(a) $\dfrac{1}{4}$ del área del cuadrado original (b) $\dfrac{1}{2}$ del área del cuadrado original

(c) $\dfrac{1}{2}$ del área de la pieza circular (d) $\dfrac{1}{4}$ del área de la pieza circular

13. Sean a, b los catetos de un triángulo rectángulo y c la hipotenusa, si denotamos por x a la longitud de la altura trazada hasta la hipotenusa desde el vértice opuesto, entonces la relación válida es

(a) $a \cdot b = x^2$ (b) $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{x}$ (c) $a^2 + b^2 = 2x^2$ (c) $\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} = \dfrac{1}{x^2}$

14. Obtener la suma de n términos de la serie

$$\frac{1}{(1+x)(1+ax)} + \frac{a}{(1+ax)(1+a^2x)} + \frac{a^2}{(1+a^2x)(1+a^3x)} + \cdots + \frac{a^{n-1}}{(1+a^{n-1}x)(1+a^nx)} + \cdots$$

(a) $\dfrac{1}{1-a}\left(\dfrac{1}{1+x} - \dfrac{a^{n+1}}{1+a^{n+1}x}\right)$ (b) $\dfrac{1}{1-a}\left(\dfrac{1}{1+x} - \dfrac{a^{n+1}}{1+a^{n}x}\right)$

(c) $\dfrac{1}{1-a}\left(\dfrac{1}{1+x} - \dfrac{a^{n}}{1+a^{n+1}x}\right)$ (d) $\dfrac{1}{1-a}\left(\dfrac{1}{1+x} - \dfrac{a^{n}}{1+a^{n}x}\right)$

15. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones usando el método de Cramer.

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - x_3 &= 5 \\ 8x_1 - 4x_2 + 7x_3 &= 1 \end{aligned}$$

(a) $x_1 = \dfrac{36+11x_2}{22}$, $x_2 \in \mathbb{R}$, $x_3 = -\dfrac{19}{11}$ (b) $x_1 = \dfrac{36+11x_3}{22}$, $x_2 = -\dfrac{19}{11}$, $x_3 \in \mathbb{R}$

(c) $x_1 = \dfrac{12+11x_3}{22}$, $x_2 = \dfrac{36+11x_3}{22}$, $x_3 \in -\dfrac{19}{11}$ (d) No tiene solución

16. Una antena parabólica tiene 12 metros de diámetro y el receptor está ubicado 6 metros arriba del vértice. ¿Cuál es la profundidad de esta antena?

(a) 6 metros (b) 3 metros (c) 5 metros (d) Ninguna de las opciones anteriores

17. Las siguientes elipses

$$n^2x^2 + m^2y^2 - m^2n^2 = 0, \qquad m^2x^2 + n^2y^2 - m^2n^2 = 0,$$

se cortan en cuatro puntos situados en una circunferencia con centro en el origen de coordenadas, determinar el radio r de esta circunferencia.

(a) $\dfrac{mn\sqrt{2}}{\sqrt{m^2+n^2}}$ (b) $\dfrac{mn\sqrt{3}}{\sqrt{m^2+n^2}}$ (c) $\dfrac{(m-n)\sqrt{2}}{\sqrt{m^2+n^2}}$ (d) $\dfrac{(m-n)\sqrt{3}}{\sqrt{m^2+n^2}}$

18. ¿ Cuál es el dominio de definición de $f(x)=\sqrt{|x^2+2x|-15}$?.

(a) $(-\infty,-5]\cup[3,\infty)$ (b) $(-\infty,-5]\cup[-3,\infty)$ (c) $[-5,-3]$ (d) $[-5,-\infty)$

19. ¿ Calcular el dominio y la imagen de $f(x)=\dfrac{4x-7}{6x^2-13x-5}$?.

(a) $D_f=\mathbb{R}\backslash\{-1/3,5/2\}$, $Im(f)=(-\infty,0)\cup(0,\infty)$

(b) $D_f=\mathbb{R}\backslash\{-1/3,5/2\}$, $Im(f)=(-\infty,\sqrt{3})\cup(\sqrt{3},\infty)$

(c) $D_f=\mathbb{R}\backslash\{-1/3,5/2\}$, $Im(f)=(-3,\infty)$

(d) $D_f=\mathbb{R}\backslash\{-1/3,5/2\}$, $Im(f)=(-\infty,\infty)$

20. Hallar el límite

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{-x}}{\sin x}.$$

(a) 0 (b) $+\infty$ (c) $\dfrac{a}{\ln a}$ (d) $\ln a$

21. Hallar el límite

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}.$$

(a) 1 (b) $+\infty$ (c) $\dfrac{\pi}{2}$ (d) 0

22. Hallar la derivada n-ésima de $y=\arcsin x$ en $x=0$

(a) $y^{(n)}=\begin{cases} 0 & n=2m \\ 1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdots(2m+1)^2 & n=2m+1\end{cases}$

(b) $y^{(n)}=\begin{cases} 0 & n=2m \\ 1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdots(2m-1)^2 & n=2m+1\end{cases}$

(c) $y^{(n)}=\begin{cases} 0 & n=2m \\ 1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdots(2m-3)^2 & n=2m+1\end{cases}$

(d) $y^{(n)}=\begin{cases} 0 & n=2m \\ 1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdots(2m+3)^2 & n=2m+1\end{cases}$

23. ¿Qué condiciones deben satisfacer los coeficientes a, b, c, d y e para que $f(x) = \dfrac{ax+b}{\sqrt{cx^2+2dx+e}}$, admita en todo punto una derivada finita distinta de cero?

(a) Las condiciones son, o bien $ad - bc = 0, ae \neq db$, con $c > 0$ y $ce - d^2 > 0$, o bien $c = 0, d = 0, e > 0, a \neq 0$.

(b) Las condiciones son, o bien $ac - bd \neq 0, ae \neq db$, con $c > 0$ y $ce - d^2 > 0$, o bien $c = 0, d = 0, e > 0, a \neq 0$.

(c) Las condiciones son, o bien $ae - bc = 0, ae \neq db$, con $c < 0$ y $ce - d^2 > 0$, o bien $c = 0, d = 0, e > 0, a \neq 0$.

(d) Las condiciones son, o bien $ae - bc = 0, ae \neq db$, con $c > 0$ y $ce - d^2 > 0$, o bien $c = 0, d = 0, e < 0$.

24. Sean r y s números naturales arbitrarios. Hallar $s_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(i+r)(i+r+s)}$

(a) $s_n = \left(\dfrac{1}{r+1} + \dfrac{1}{r+2} + \cdots + \dfrac{1}{r+s} - \dfrac{1}{n+r+1} - \dfrac{1}{n+r+2} - \cdots - \dfrac{1}{n+r+s}\right)$

(b) $s_n = \dfrac{1}{s}\left(\dfrac{1}{r+1} + \dfrac{1}{r+2} + \cdots + \dfrac{1}{r+s} - \dfrac{1}{n+r+1} + \dfrac{1}{n+r+2} - \cdots - \dfrac{(-1)^s}{n+r+s}\right)$

(c) $s_n = \dfrac{1}{s}\left(\dfrac{1}{r+1} + \dfrac{1}{r+2} + \cdots + \dfrac{1}{r+s} - \dfrac{1}{n+r+1} - \dfrac{1}{n+r+2} - \cdots - \dfrac{1}{n+r+s}\right)$

(d) $s_n = \dfrac{1}{s}\left(\dfrac{1}{r+1} + \dfrac{1}{r+2} + \cdots + \dfrac{1}{r+s} + \dfrac{1}{n+r+1} - \dfrac{1}{n+r+2} + \cdots - \dfrac{(-1)^{s+1}}{n+r+s}\right)$

25. Calcular $I = \displaystyle\int \frac{x+2}{(x-1)\sqrt{x^2+1}}$

(a) $I = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) - \dfrac{3}{\sqrt{2}} \ln \dfrac{1}{x-1}\left(\dfrac{x+1}{2} + \dfrac{1}{2}\sqrt{x^2+1}\right) + c$

(b) $I = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) - \dfrac{3}{2} \ln \dfrac{1}{x-1}\left(\dfrac{x+1}{2} + \dfrac{1}{2}\sqrt{x^2+1}\right) + c$

(c) $I = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) - \dfrac{3}{\sqrt{2}} \ln \dfrac{1}{x-1}\left(\dfrac{x+1}{2} + \dfrac{3}{\sqrt{2}}\sqrt{x^2+1}\right) + c$

(d) $I = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) - \dfrac{3}{\sqrt{2}} \ln \dfrac{1}{x-1}\left(\dfrac{x+1}{2} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{x^2+1}\right) + c$

Concurso Nacional Pierre Fermat 2023

Escuela Superior de Física y Matemáticas del I.P.N.

Guía para Nivel Superior

Problemas

1. ¿Para qué valores de k es $x^3 + y^3 + x^3 + kxyz$ divisible por $x + y + z$?

   (a) -1 $\quad$ (b) 1 $\quad$ (c) 2 $\quad$ (d) 3

2. Sea $f : X \to Y$ una función entre conjuntos. Para $A \neq \emptyset$, $A \subseteq X$, denotamos por $f[A]$ a la imagen de A bajo f. Dado un conjunto $B \neq \emptyset$, $B \subseteq Y$, denotemos por $f^{-1}[B]$ a la preimagen de B bajo f. Determinar cuál de las siguientes fórmulas siempre es válida:

   (a) $f[A_1 \cap A_2] = f[A_1] \cap f[A_2]$ $\quad$ (b) $f^{-1}[B_1 \cap B_2] = f^{-1}[B_1] \cap f^{-1}[B_2]$ $\quad$ (c) $f^{-1}[f[A]] = A$
   (d) Ninguna de las opciones anteriores

3. Calcular el límite

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1^2}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + \cdots + \frac{n^2}{n^3} \right)$$

   (a) $\frac{1}{3}$ $\quad$ (b) $\frac{1}{2}$ $\quad$ (c) 1 $\quad$ (d) ∞

4. Para un número real positivo c, ¿Sobre qué conjunto es uniformemente continua la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$?

   (a) $(0, c]$ $\quad$ (b) $[-c, 0) \cup (0, c]$ $\quad$ (c) $[c, \infty)$ $\quad$ (d) $[-c, 0) \cup (0, c]$

5. Sea $V := \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid f$ f función el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de sucesiones reales con las operaciones usuales de suma y producto por escalar. Si se define la función $T : V \to V$ mediante la regla

$$T(f)(n) := \begin{cases} 0, & n = 1 \\ f(n-1), & n > 1 \end{cases}$$

   ¿Qué enunciado se cumple para T?

   (a) T es un isomorfismo de espacios vectoriales $\quad$ (b) T es una función inyectiva
   (c) T no es una función suprayectiva $\quad$ (d) T no es una transformación lineal

6. Sean V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial. Para $f, g \in V^*$, sea $h : V \to \mathbb{R}$ la aplicación definida por

$$h(u) = f(u)g(u), \ \forall \ u \in V.$$

   Si h es un funcional lineal. Determine cuál de los siguientes enunciados siempre se cumple:

   (a) $f = 0$ o $g = 0$ $\quad$ (b) h es inyectiva $\quad$ (c) h es suprayectiva
   (d) $h(u + v) = f(u) + g(v)$ $\forall\ u, v \in V$

7. Sean A y B matrices de tamaños 2×1 y 1×2 respectivamente. Indicar cuál de los siguientes enunciados siempre se cumple para la matriz AB.

   (a) AB no es invertible (b) AB es simétrica (c) AB es diagonalizable
   (d) AB es antisimétrica

8. Sea $Sym(\mathbb{R})$ el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de matrices simétricas de tamaño 3×3 con las operaciones usuales suma y producto por escalar de matrices. Calcular $\dim(Sym(\mathbb{R}))$

   (a) $dim(W) = 3$ (b) $dim(W) = 6$ (c) $dim(W) = 9$ (d) $dim(W) = 12$

9. Sea $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. Determinar cuál de los siguientes enunciados es verdadero:

   (a) $(V, \cdot)$ es un semigrupo (b) $(V, \cdot)$ es un grupo (c) $(V, +, \cdot)$ es un campo
   (d) V tiene al menos dos elementos

10. Elija la opción verdadera:

    (a) Si
$$A = \begin{pmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & b+2 & 1 \\ 1 & 1 & c+3 \end{pmatrix}$$
    con $a \neq 0$, $b+1 \neq 0$, $c+2 \neq 0$, entonces
$$(det(A^t))^{100} = a^{100}b^{100}c^{100}\left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+2}\right)^{100}$$

    (b) Sea la función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,
$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} (a+1)x & y & z \\ x & (b+2)y & z \\ x & y & (c+3)z \end{pmatrix}$$
    con $a \geq 0$, $b \geq 0$ y $c \geq 0$. Entonces f es invertible si y sólo si $a > 0$

    (c) Sean los subconjuntos de $\mathbb{R}^3$, $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x + y - z = 0\}$ y $W^* = \{(p,q,r) \in \mathbb{R}^3 \ : \ xp + yq + zr = 0, \text{ para todo } (x,y,z) \in W\}$, entonces W^* es isomorfo a $\mathbb{R}^2$

    (d) Ninguna opción es verdadera

11. Caclcular el siguiente límite
$$\lim_{h \to 0} \frac{e^{x^2}(e^{2xh+h^2}\cos(x+h) - \cos x)}{h}, \qquad x, h \in \mathbb{R}$$

    (a) El límite no existe (b) $I = 0$ (c) $I = 2xe^{x^2}\cos x - e^{x^2}\sin x$
    (d) $I = e^{x^2}\cos x + e^{x^2}\sin x$

12. Elija la opción verdadera:

(a) Si dos series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n$ tienen la misma suma $f(x)$ en una vecindad del punto a, entonces $\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!} = a_n = b_n$ para toda $n \geq 0$

(b) Si dos series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n$ tienen la misma suma $f(x)$ en una vecindad del punto a, entonces $f^{(n)}(a) = a_n = b_n$ para toda $n \geq 0$

(c) f no es continua en $x = a$

(d) Ninguna opción es verdadera

13. Para $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función continua, calcular la integral.

$$\int_{-1}^{0} dx \int_{-x}^{\frac{x+4}{3}} f(x,y)\ dy + \int_{0}^{2} dx \int_{x}^{\frac{x+4}{3}} f(x,y)\ dy$$

(a) $y - (3y-4)f(x,y)$ $\qquad$ (b) $\displaystyle\int_0^1 dy \int_{-y}^{y} f(x,y)\ dx + \int_1^2 dy \int_{3y-4}^{y} f(x,y)\ dx$

(c) $f(-1,0) - f(2,1)$ $\qquad$ (d) $\displaystyle\int_0^1 dx \int_{-y}^{y} f(x,y)\ dy + \int_1^2 dy \int_{3y-4}^{y} f(x,y)\ dx$

14. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función diferenciable en $\mathbb{R}^n$. Indicar cuál de los siguientes enunciados es verdadero.

(a) Si $A \subset \mathbb{R}^n$ y $A = \overline{A}$, entonces $f(A)$ contiene sus puntos de acumulación y existe $r > 0$ tal que $A \subseteq B(0_{\mathbb{R}^n}, r)$

(b) $f([-1,1]^n) = \overline{f([-1,1]^n)} \subseteq B(0_{\mathbb{R}^n}, r)$ para algún $r > 0$

(c) $Df(x)$ es discontinua en $0_{\mathbb{R}^n}$

(d) Ningún inciso es verdadero

15. Calcular el área de la región del plano cartesiano acotada entre los ejes coordenados y la curva $f(x) = \dfrac{1}{e^{x^2}}$

(a) $\sqrt{\pi}$ $\qquad$ (b) $\dfrac{\pi}{2}$ $\qquad$ (c) ∞ $\qquad$ (d) 1

16. Calcular el valor de la integral

$$\int_G y\cos(xy)\ dx + x\cos(xy)\ dy$$

donde G es una circunferencia de centro en $(0,0)$ y de radio 1, recorrida en el sentido antihorario.

(a) $\dfrac{\pi}{2}$ $\qquad$ (b) 1 $\qquad$ (c) π $\qquad$ (d) 0

17. Sea $\mathbb{R}^2$ con la topología usual inducida por la métrica ecuclideana y considérese el subconjunto

$$A = \left\{ \left((-1)^n + \frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right) \ : \ n = 1, 2, \dots \right\} \cup \{(1,0), (-1,0)\}.$$

Indicar cuál de las opciones listadas es verdadera.

(a) $\left(1 + \frac{1}{n}, 0\right) \in \overline{A}$ para todo natural n (b) A es abierto

(c) $(0,0)$ es un punto de acumulación de $A \cup \{(0,0)\}$ (d) Ninguna opción es verdadera

18. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida como $f(x) = \sqrt{|9 - x^2|}$. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

(a) La función tiene tres puntos críticos

(b) La función es continua y derivable en todo su dominio

(c) La función tiene dos puntos extremos que nos son puntos críticos

(d) Ninguna de las afirmaciones se cumple

19. Sea $F(\mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \text{funciones en } \mathbb{R}\}$ con las operaciones suma y producto por escalar. ¿Cuál de las siguientes opciones se cumple?

(a) $F(\mathbb{R})$ no es un espacio vectorial

(b) $F(\mathbb{R})$ tiene dimensión finita

(c) $F(\mathbb{R})$ se puede ver como la suma directa de las funciones pares y la funciones impares

(d) Ninguna de las afirmaciones se cumple

20. Considérese dos rectas no paralelas $L_1 : \ \vec{r}_1(t) = \vec{r}_{01} + t \ \vec{d}_1$ y $L_2 : \ \vec{r}_2(s) = \vec{r}_{02} + s \ \vec{d}_2$ en $\mathbb{R}^3$. Hallar la expresión que permite calcular la distancia entre ambas rectas.

(a) $\dfrac{||(\vec{r}_{02} - \vec{r}_{01}) \times (\vec{d}_1 \times \vec{d}_2)||}{||\vec{d}_1 \times \vec{d}_2||^2}$ (b) $\dfrac{||(\vec{r}_{02} - \vec{r}_{01}) \cdot (\vec{d}_1 \times \vec{d}_2)||}{||\vec{d}_1 \times \vec{d}_2||^2}$ (c) $\dfrac{|\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2| \cdot ||(\vec{r}_{02} - \vec{r}_{01})||}{||\vec{d}_1 \times \vec{d}_2||}$

(d) Ninguna de las opciones anteriores

21. Sea $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(x,y) \mid x = -y\} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x,y) = x(x+y) + \frac{y}{x+y}.$$

Encontrar los valores de las constantes a y b tales que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + a\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + b\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

(a) $a = -2$, $b = 1$ (b) $a = -2$, $b = -1$ (c) $a = 2$, $b = 1$ (d) $a = 0$, $b = 0$

22. Calcular el volumen comprendido entre el cilíndro $x^2 + y^2 = a^2$ y el hiperboloide $x^2 + y^2 - z^2 = \ - a^2$

(a) $\frac{5}{3}a^2\pi(2\sqrt{2}+1)$ (b) $\frac{4}{3}a^2\pi(2\sqrt{2}+1)$ (c) $\frac{5}{3}a^3\pi^2(2\sqrt{2}-1)$ (d) $\frac{4}{3}a^3\pi(2\sqrt{2}-1)$

23. ¿En qué caso la integral curvilinea

$$\oint P\ dx + Q\ dy + R\ dz$$

es igual a cero para cualquier contorno cerrado C?

(a) $\dfrac{\partial R}{\partial y} = \dfrac{\partial P}{\partial z}, \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial R}{\partial z}, \dfrac{\partial Q}{\partial y} = \dfrac{\partial R}{\partial z}$ $\qquad$ (b) $\dfrac{\partial R}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial z}, \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial R}{\partial z}, \dfrac{\partial Q}{\partial y} = \dfrac{\partial P}{\partial z}$

(c) $\dfrac{\partial R}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial z}, \dfrac{\partial P}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial x}, \dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$ $\qquad$ (d) $\dfrac{\partial R}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}, \dfrac{\partial P}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial x}, \dfrac{\partial Q}{\partial y} = \dfrac{\partial P}{\partial z}$

24. Determinar la solución de la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{y}{x}dx + (y^3 - \ln x)dy = 0$$

(a) $\dfrac{x}{y} + \dfrac{x^2}{2} = C$ $\qquad$ (b) $\dfrac{1}{y}\ln x + \dfrac{1}{2}y^2 = C$ $\qquad$ (c) $\ln|x| - \dfrac{y^2}{2} = C$ $\qquad$ (d) $\dfrac{x}{y^2} + \dfrac{x^2}{2} = C$

25. Determinar la solución general de la siguiente ecuación diferencial

$$(1+x)^2y'' - 3(1+x)y' + 4y = (1+x)^3$$

(a) $y = (1+x)^2(c_1 + c_2\ln(1+x) + (1+x)^3)$ $\qquad$ (b) $y = (1+x)(c_1 + c_2\ln(1+x) + (1+x)^3)$

(c) $y = (1+x)^2(c_1 + c_2\ln(1+x) + (1+x)^2)$ $\qquad$ (d) $y = c_1 + c_2(1+x)\ln(1+x) + (1+x)^3$

COMITÉ ORGANIZADOR

Presidente

Miguel Tufíño Velázquez

Coordinación general

Carlos Alejandro Moreno Muñoz

Erick Lee Guzmán

Comité del nivel superior

Andrés Sabino Díaz Castro

José Oscar González Cervantes

Ignacio Hermelindo Otero Rubio

Salvador Quintín Flores García

Comité del nivel medio superior

Abelardo Santaella Quíntas

Comité del nivel secundaria

Pablo Lam Estrada

Gamaliel Yafte Téllez Sánchez

Oliver Fernando Cuate González

Patrocinadores

Reason Play, S.A.

Universidad Anáhuac

Kepler Institute

Liber IK