INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

ESCUELA SUPERIOR DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

XXIV

GUÍA TODOS LOS NIVELES

2022

El concurso consta de tres niveles

Secundaria, Medio Superior y Superior.

Requisitos

1. Estar inscrito en cualquier escuela pública o privada del pais.
2. El nivel inscrito en su escuela debe coincidir con el nivel en el que participarán en el concurso, por lo que se debe presentar un comprobante de estudios vigente (credencial o constancia) al momento de presentarse a la fase eliminatoria.

Etapas del concurso

1. **Registro:** 1 de junio al 13 de agosto del 2022 en la siguiente dirección https://forms.gle/L6V5MpyXf9BZJjVo6
2. **Eliminatoria:** 20 de agosto 10:00 a.m. en todas las sedes. Aquellos que obtengan mejor calificación pasarán a la siguiente etapa.
3. **Final:** 15 de octubre 10:00 a.m. en la ESFM - IPN.
4. **Premiación:** 25 de noviembre del 2022 a las 12:00 p.m. en el Auditorio "Víctor Flores Maldonado"de la ESFM-IPN. Todos los concursantes recibirán diploma de participación. Los ganadores obtendrán diploma y un presente de nuestros patrocinadores. Los premios se entregarán únicamente durante la Ceremonia de premiación.

La inscripción es gratuita, sólo se realizará de manera electrónica y no habrá prórroga al periodo definido.

Concurso Nacional de matemáticas "Pierre Fermat"

La misión de la Escuela Superior de Física y Matemáticas del Instituto Politécnico Nacional es formar integralmente profesionales de excelencia en el campo de las ciencias físico-matemáticas con alto grado de comprensión y responsabilidad social, capaces de contribuir al desarrollo económico, científico y tecnológico del país; mediante la docencia, la investigación, la innovación, la vinculación y la divulgación del conocimiento en estas áreas.

Por ello es que la realización del Concurso Pierre Fermat se ha vuelto una tradición desde 1990, ya que através de el, se pretende motivar, estimular y promocionar en los estudiantes el gusto por las matemáticas. Esperamos despertar en los jóvenes de hoy un interés genuino por la matemáticas que los lleve al camino de las ciencias.

1. Nivel secundaria

1. ¿Cuál es el resultado de $(361)^3$?.

2. La suma de dos números impares positivos consecutivos es igual a una sexta parte de su producto incrementado en una unidad. ¿Cuáles son tales números?

3. Determinar todos los valores de ϕ para los cuales $\cos(\phi) = 1.000001$ o $\cos(\phi) = 0$.

4. Encontrar la sexagésima cuarta parte del número 2^{2022}.

5. De acuerdo al siguiente triángulo

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1\ 1 \\ 1\ 2\ 1 \\ 1\ 3\ 3\ 1 \\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots \end{array}$$

   Determine en qué número de fila aparece el octavo número primo perteneciente a dicho triángulo.

6. ¿Cuál es el último dígito del resultado de 7^{2022}?

7. Sea A, B y C los siguientes conjunto:

$$A = \{1, 2, \{3\}, 4\}, \quad B = \{2, \{3\}, a, b\} \quad \text{y} \quad C = \{1, \{3\}, b\}.$$

   ¿Cuál es el conjunto $(A \cup C) \cap B$?

8. En un salón de clases con 48 alumnos se tiene que el 25 % de los estudiantes obtuvo en un examen una calificación inferior o igual 7, 15 fueron calificados con 8 y dos terceras partes de los alumnos restantes sacaron 9. ¿Cuántos tienen una nota de 10?

9. Un cuadrado es cortado en 9 cuadrados con exactamente la misma área. Luego se remueve el cuadrado central y en los restantes se repite el proceso de dividir y sustraer el central. Si esta acción se realiza un total de 3 veces, ¿Cuál es la proporción del área de la figura obtenida respecto al área total del cuadrado original?

10. Encuentre todos los números reales a, b tales que satisfagan que los puntos $(2, -2)$ y $(3, 4)$ pertenezcan a la curva
$$y = ax^2 + bx + 3$$

11. Considere el arreglo de la Figura 1. ¿Es posible trazar una sola linea continua que no se corte a si misma, que inicie fuera del arreglo, que pase por todas las aristas (sin utilizar los vértices) y cortando sólo una vez a cada una de estas?

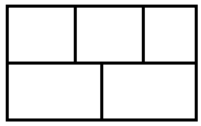


Figura 1: Diagrama del ejercicio 11

12. Un carpintero desea cortar un cubo, de 30 cm por lado, en 27 cubos de igual volumen. Considerando que tras cada corte puede reacomodar las piezas obtenidas. ¿Es posible obtener los cubos pequeños en menos de 6 cortes?

13. Tres circunferencias son colocadas de manera tangencial, como se muestra en la Figura 2, si las medidas del triángulo cuyos vértices se encuentran en los centros de cada círculo son 12, 20 y 9. ¿Cuál es la longitud de cada uno de los radios de las circunferencia?

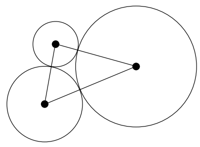


Figura 2: Círculos tangenciales del ejercicio 13

14. Calcular el valor de $\tan(2\theta)$, si se sabe que $\cos(2\theta) = \dfrac{2}{3}$.

15. Dado el siguiente arreglo de números

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & 1 & 1 & & & & & & \\
1 & 2 & 3 & 2 & 1 & & & & \\
1 & 3 & 6 & 7 & 6 & 3 & 1 & & \\
1 & 4 & 10 & 16 & 19 & 16 & 10 & 4 & 1
\end{array}$$

Encontrar la regla general para obtener el siguiente renglón. Usar esta regla para obtener los siguientes tres renglones de la tabla.

16. Encontrar los valores de los dígitos v, w, y, z en la siguiente expresión:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & w & y & z \\
 & \times & & w & v \\
\hline
 & 1 & w & w & 7 \\
2 & w & z & w & \\
\hline
2 & 7 & w & 0 & 7
\end{array}$$

17. Si M, N, P y Q son los puntos medios de los lados del cuadrado $\square ABCD$ de área igual a 1, ¿cuál es el valor del área de la parte sombreada (ver Figura 3)

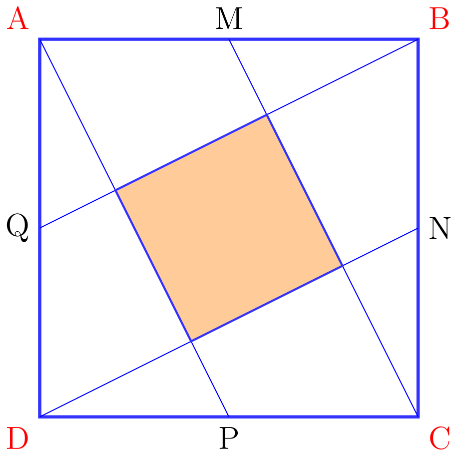


Figura 3: Cuadrado del ejercicio 17

18. De un pedazo cuadrado de cartón se ha recortado un disco, como se muestra en la Figura 4. El área del cartón sobrante es de $10\frac{1}{2}$ cm^2. ¿Cuál es el radio del disco y cuál es el lado del cuadrado?

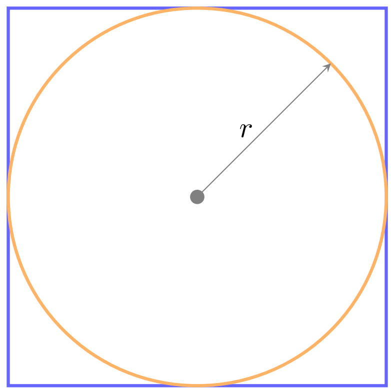


Figura 4: Disco y cuadrado del ejercicio 18

19. Las edades actuales de Pedro, José y Alberto son números primos distintos. Pedro es menor que Alberto, y éste a su vez es menor que José. La suma de las edades de todos ellos es divisible por 17, la suma de las edades de los 2 mayores es menor a 90 y el menor tiene más de 23 años. Encontrar las edades de cada uno.

20. Un grupo de personas en la Ciudad de México solicitan trabajo para una jornada laboral al día de tres horas, por lo cual es posible que algunas de ellas puede solicitar tres trabajos distintos al mismo tiempo y tener una jornada laboral al día de nueve horas diarias. Los trabajos más solicitados son los siguientes:

   A Mensajería de documentos de gobierno federal,

   B Mensajería de documentos bancarios, y/o

   C Mensajería de gobierno de la Ciudad de México.

Los resultados son los siguientes:

a) 8 personas fueron contratadas para trabajar al mismo tiempo en las mensajerías A, B y C,

b) 19 personas fueron contratadas para trabajar al mismo tiempo en las mensajerías A y B,

c) 20 personas fueron contratadas para trabajar al mismo tiempo en las mensajerías A y C,

d) 53 personas fueron contratadas únicamente para trabajar en la mensajería A,

e) 48 personas fueron contratadas únicamente para trabajar en la mensajería B, y

f) 47 personas fueron contratadas únicamente para trabajar en la mensajería C.

Si 300 personas fueron las que solicitaron dichos trabajos, ¿cuántos personas fueron contratadas para trabajar al mismo tiempo en las mensajerías B y C?

21. Considere la región limitada por una semicircunferencia C de radio 10 unidades y su diámetro; además, de la cuerda $\overline{AB}$ que forma un ángulo de 30° con respecto al diámetro como se muestra en la Figura 5. Calcule el área de la región rayada.

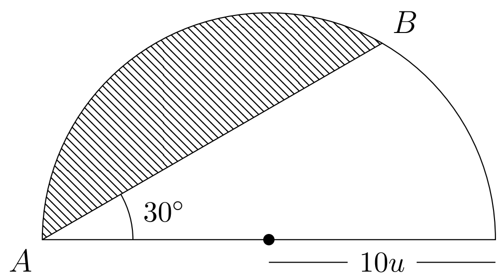


Figura 5: Semicircunferencia del ejercicio 21

22. Exprese el número

$$1000000000002008000000000001$$

como una diferencia de cuadrados de dos números enteros positivos.

23. Un triángulo $\triangle ABC$ tiene los datos LAL: $a = 5$, $\angle C = 94°$ y $b = 7$. ¿Cuáles son las medidas de las longitudes y ángulos interiores restantes del triángulo $\triangle ABC$?

24. Si en la Figura 6 todos los triángulos son equiláteros y si el área del triángulo $\triangle ABC$ es 16, calcular el valor del área sombreada.

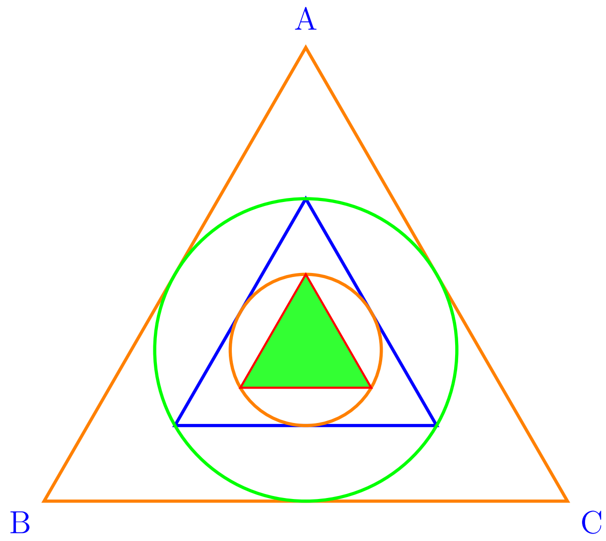
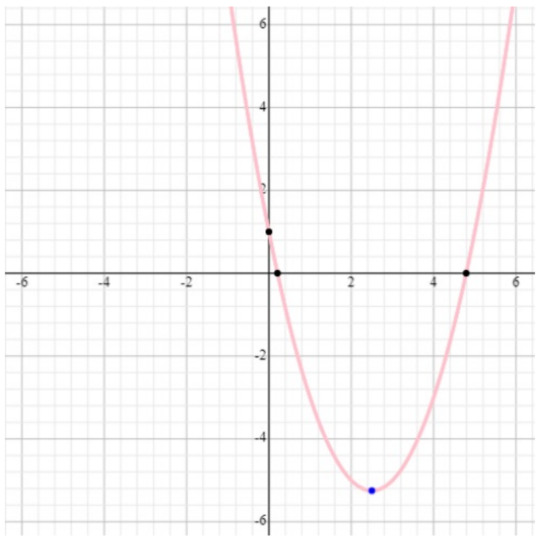


Figura 6: Triángulos y círculos del ejercicio 24

25. Para la gráfica de abajo



¿Cuál es la función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$ que corresponde a dicha gráfica?

2. Nivel medio superior

1. Para $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, ¿ Cuántas funciones biyectivas $f : A \to A$ satistfacen $f(1) \neq 1$?

2. Encuentre todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que se cumpla
$$f(x^3y + f(x+y)) = (f(x))^3y + x + f(y),$$
para toda x, y reales.

3. Encontrar una fórmula para la siguiente suma
$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + (n-1) \cdot n.$$

4. Encontrar el valor de
$$S = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1 + \sqrt{n}}{\sqrt{n}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n-1} + \sqrt{n}} \right)$$

5. Resolver
$$x^2 \leq |x^2 - 1|$$

6. Encontrar el conjunto solución.
$$|2x - 1| + |3x + 1| > |7 - x|.$$

7. Sea b un número impar. Encontrar la solución de $3x^3 + bx^2 + 5x = 0$.

8. Si $p(x)$ es un polinomio con coeficientes reales tal que se cumple
$$(2x + 1)p(x) = (64x + 2)p(x + 1)$$
para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces diga de que grado es $p(x)$.

9. Sean n rectángulos con bases $1, 2, \ldots n$ y altura 2. Sea A_r el área de estos rectángulos. Sean n cuadrados de lados $1, 2, \ldots n$. Sea A_c el área de estos cuadrados. ¿ A partir de que n se cumple que $\dfrac{A_c}{A_r} > 2022$?

10. Sea b un entero y d el máximo común divisor de $(123)^16 - b^{16}$ y $b^2(123)^4 + (123)^2b^4$. ¿ Cuál es el valor de d?

11. Sean x, y, z enteros positivos. Encontrar los valores de x tal que $x^5 + y^5 = z^5$ y $y \geq x$.

12. Hallar todos los valores de x, mayores de cero, pero menores de 2π, para los cuales se cumple la desigualdad
$$\cos x - \sin x - \cos(2x) > 0.$$

13. Demostrar que se cumple que
$$\tan \alpha_1 < \frac{\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2 + \cdots + \sin \alpha_n}{\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 + \cdots + \cos \alpha_n} < \tan \alpha_n,$$
si
$$0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n < \frac{\pi}{2}.$$

14. En el triángulo ABC, el ángulo A es dos veces mayor que el B. Por los lados conocidos b y c hallar el lado a.

15. Hallar la ecuación de la elipse que es tangente a la dos rectas

$$3x - 2y - 20 = 0, \qquad x + 6y - 20 = 0,$$

si sus ejes coinciden con los ejes coordenados.

16. Demostrar que si dos parábolas con los ejes perpendiculares entre sí se cortan en cuatro puntos, estos puntos están situados en una circunferencia.

17. Desde el foco derecho de la hipérbola

$$\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1,$$

se ha dirigido un rayo de luz que forma con el eje OX un ángulo α ($\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$). Se sabe que $\tan\alpha = 2$. Llegando a la hipérbola, el rayo se ha reflejado de ella. Hallar la ecuación de la recta en la que está situado el rayo reflejado.

18. Si $f(x) = x^n$, calcular el valor de

$$f(1) + \frac{f'(1)}{1!} + \frac{f''(1)}{2!} + \frac{f'''(1)}{3!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(1)}{n!}.$$

19. Calcular la derivada 100 - ésima de $f(x) = x^2e^{-2x}$.

20. Encontrar el mínimo valor de la función $f(x) = 2|x-2| + 5|x-3|$ en $\mathbb{R}$.

21. Sea $0 \le a \le 1$. Encontrar el valor de

$$S = \int_0^a \sqrt{1-x^2}\ dx + \int_0^{\sqrt{1-a^2}} \left(\sqrt{1-y^2} - a\right)\ dy$$

22. Las rectas tangentes a la gráfica de una función $f(x)$ en $(1, f(1)), (2, f(2)), (3, f(3))$ forman ángulos $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}$ y $\frac{\pi}{4}$ respectivamente. Encontrar el valor de

$$\int_2^3 f'(x)f''(x)\ dx + \int_1^3 f''(x)\ dx.$$

23. ¿ Cuántos números telefónicos se pueden formar de cinco cifras de manera, que en cada número tomado por separado las cifras sean diferentes?

24. Un restaurante ofrece cuatro opciones de sopas y ensaladas (dos sopas y dos ensaladas), dos opciones de pan y tres opciones de plato fuerte. Determine el número de comidas que se pueden formar en cada uno de los casos siguientes

    a) Se debe incluir un elemento de cada opción.

    b) Sólo debe incluir una sopa y un plato fuerte.

25. ¿ Cuántas diferentes " combinaciones"de tres números son posibles en un candado de combinación que tiene 40 números en su perilla? (Se permiten repeticiones y el orden también importa.)

3. Nivel superior

1. Sean $A, B \in M_{nxn}(\mathbb{R})$. Definimos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mediante la regla $f(t) = det(A + tB)$. Demostrar que la función f es derivable en el punto 0 y calcular $f'(0)$.

2. ¿ Para qué valores de $n \in \mathbb{N}$, el número $n^4 + 4^n$ es primo ?

3. Sea $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$. ¿ Es posible construir una función $f : [0, 1] \to [0, 1]$ continua únicamente en A?

4. En el conjunto de los números reales defínanse las siguientes operaciones:
   $r_1 \oplus r_2 = r_1 + r_2$ para cada par de elementos $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$.
   $q \odot r = qr$ para todo $q \in \mathbb{Q}$ y para todo $r \in \mathbb{R}$.
   i) Demostrar que la terna $(R, \oplus, \odot)$ es un $\mathbb{Q}$ - espacio vectorial.
   ii) Demostrar que el conjunto $\{1, r\} \subseteq \mathbb{R}$ es libre en $\mathbb{R}$ si y sólo si $r \in \mathbb{I}$.
   iii) Deducir que $dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R})$ es infinita.
   iv) ¿ Cuál de las dos proposiciones siguientes es verdadera: ?
      a) $dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}) = \aleph_0$
      b) $dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}) = c$ Justificar plenamente su respuesta.

5. Encontrar todas las funciones continuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que:
$$f(x + y)f(x–y) = (f(x) \cdot f(y))^2.$$

6. Encontra el valor de la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^{n-1} \sin^3(\frac{x}{3^n}).$$

7. Si $a, b \in \mathbb{Z}$ son tales que $(a, b) = 1$, entonces demostrar que $(a + b, a^2 - ab + b^2)$ es 1 o 3.

8. Determinar el lugar geométrico de los puntos (x, y) tales que
$$sen(x + y) = senx + seny.$$

9. Considere una transformación de Moebius $T(z) = (az+b)/(cz+d)$ donde $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ y $ad - bc \neq 0$. Considere el conjunto $c_T = \{\ z \in C\ :\ T(\overline{z}) = z + 1 = 0\}$.
   Muestre que c_T representa una circunferencia si
$$-(cT(z)–a)(cz + d) = ad - |c|^2$$
   para toda $z \in c_T$.

10. Demostrar que
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}.$$

11. Pruebe que 7 divide a $1^{47} + 2^{47} + 3^{47} + 4^{47} + 5^{47} + 6^{47}$.

12. Sean $f \in \mathcal{C}[0, 1]$ y $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ una función periódica, con periodo 1. Muestre que
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x)g(x)\ dx = \left(\int_0^1 f(x)\ dx\right)\left(\int_0^1 g(x)\ dx\right).$$

13. Encuentre el conjunto de enteros positivos a, b y c que satisfacen la ecuación

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1.$$

14. Encuentre la solución de la ecuación

$$\tan\theta = 2+\tan(3\theta),$$

que satisface $0<\theta<2\pi$. Expresar la respuesta en múltiplos racionales de π.

15. Sea $f(x)=x^m(x-1)^n$, donde m, n son enteros mayores que 1. Muestre que

$$f'(x)=\left(\frac{m}{x}-\frac{n}{1-x}\right)f(x).$$

16. Considere la ecuación cúbica $x^3-px^2+qx-r=0$, donde $p\neq 0$ y $r\neq 0$. Determine las raíces que pueden escribirse de la forma ak^{-1}, para algunas constantes a y k. Muestre que una de las raíces es q/p y que $q^3-rp^3=0$.

17. Sea

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\,dx.$$

Usando el cambio de variable $x=\sin(4t)$, muestre que

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{8}}\frac{2\cos(4t)}{\cos^2 t}\,dt.$$

18. Calcular

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}\,dx.$$

19. En el triángulo ABC, el ángulo $\angle BAC=\alpha$ y $\angle CBA=2\alpha$ donde 2α es agudo y $BC=x$. Muestre que $AB=(3-4\sin^2\alpha)x$.

20. Sea n un número natural y sean $c_1,c_2,\ldots,c_n$ números reales todos distintos. Defínase la matriz $C\in M_n(\mathbb{R})$ como sigue

$$C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1\\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n\\ c_1^2 & c_2^2 & \cdots & c_n^2\\ c_1^3 & c_2^3 & \cdots & c_n^3\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ c_1^{n-1} & c_2^{n-1} & \cdots & c_n^{n-1}\end{pmatrix}$$

Demostrar que C es invertible y calcular C^{-1}.

21. Hallar las matrices $X\in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$, tales que

$$AXA^t=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2017 & 7(2017) & 2(2017)\\ 0 & 7(2017) & 49(2017) & 14(2017)\\ 0 & 2(2017) & 14(2017) & 4(2017)\end{pmatrix},$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 1 \\ 7 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Nota: A^t es la transpuesta de A.

22. Si a es un número real, analizar la convergencia o divergencia de la sucesión de matrices
$$\left(\begin{bmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{bmatrix} \right)_n .$$

23. Resolver la ecuación
$$\det \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

24. Para sacar dinero de un cajero automático tengo que marcar un número de identificación personal. He olvidado mi PIN, pero sé que es equiprobable que sea cualesquiera de los siguientes números $1, 2, \ldots, n$. Planeo marcar estos números en orden ascendente hasta obtener el correcto. Esto puede hacerse a razón de r números por minuto. Tan pronto como marque el primer número incorecto, se alertará a la policia. La probabilidad de que lleguen en un tiempo de t minutos es $1 - e^{-\lambda t}$, con $\lambda > 0$. Si sigo mi plan, muestre que la probabilidad de que llegue la policía antes de que reciba mi dinero es
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1 - e^{-\lambda(k-1)/r}}{n}.$$

25. Si B es una v.a. con una dsitribución normal, con media cero y varianza cero. Encuentre la probabilidad de que la ecuación cuadrática
$$x^2 + 2Bx + 1 = 0,$$
tenga raíces reales.

COMITÉ ORGANIZADOR
Presidente
Miguel Tufíño Velázquez

Coordinación general
Carlos Alejandro Moreno Muñoz
Erick Lee Guzmán

Elaboración de problemas y apoyo técnico
Pablo Lam Estrada
Andrés Sabino Díaz Castro
Abelardo Santaella Quíntas
Salvador Quintín Flores Gracía
Francisco Ramírez Reyes
José Oscar González Cervantes
Gamaliel Yafte Téllez Sánchez
Oliver Fernando Cuate González

Patrocinadores
Universidad Anáhuac
Reason Play, S.A.
KEPLER Institute
LIBER IK