

ESCUELA SUPERIOR DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS



GUÍA 2025
TODOS LOS NIVELES

Concurso Nacional Pierre Fermat 2024

Escuela Superior de Física y Matemáticas del I.P.N.

PRESENTACIÓN

Biografía de Pierre de Fermat

Pierre de Fermat nació en Beaumont-de-Lomagne, Francia, el 17 de agosto de 1601, en el seno de una familia acomodada. Su padre, Dominique Fermat, era un negociante local, y desde muy joven Pierre mostró gran inclinación por el estudio. Tras cursar sus primeras lecciones en el Collège de Navarre en Montauban, se trasladó a la Universidad de Toulouse, donde obtuvo el doctorado en Derecho Civil en 1631.

A partir de entonces, Fermat combinó su carrera como jurista —ejerció como consejero (“président à mortier”) en el Parlamento de Toulouse— con una intensa labor matemática desarrollada principalmente a través de correspondencia con otros grandes nombres de la época, como Marin Mersenne, Blaise Pascal y René Descartes. Nunca publicó un tratado completo; sus descubrimientos quedaron muchas veces registrados en cartas y anotaciones marginales en libros prestados o adquiridos.

En teoría de números, Fermat formuló y demostró varios resultados fundamentales, entre ellos el Pequeño Teorema de Fermat y criterios para la representación de números como suma de dos cuadrados. Su célebre “Último Teorema”, enunciado en 1637, anticipó que no existen soluciones enteras no triviales a la ecuación

$$x^n + y^n = z^n, \quad n > 2,$$

con $x, y, z \in \mathbb{Z}$; esta conjetura permaneció sin demostrarse hasta 1994. Simultáneamente exploró problemas de tangentes y máximos y mínimos, anticipando técnicas del cálculo diferencial, y trabajó en geometría analítica de manera casi paralela a Descartes, desarrollando el uso de coordenadas.

Fermat falleció en Toulouse el 12 de enero de 1665, víctima de la peste. Su legado perdura hoy en múltiples ramas de las matemáticas: la teoría de números, el análisis y la geometría analítica deben gran parte de sus bases a sus ideas. Su método de aproximaciones y su insistencia en la demostración rigurosa marcaron un antes y un después en el desarrollo científico, y su nombre sigue asociado a teoremas, procesos y conjeturas que inspiran a matemáticos de todo el mundo.

Teoremas de Fermat

1. **Pequeño teorema de Fermat.** Para todo primo p y todo entero a con $\gcd(a, p) = 1$,

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}, \quad \text{equivalente a} \quad a^p \equiv a \pmod{p}.$$

2. **Último teorema de Fermat.** Para todo entero $n > 2$, la ecuación

$$x^n + y^n = z^n$$

no admite soluciones enteras no triviales ($xyz \neq 0$).

3. **Teorema de la suma de dos cuadrados.** Un primo p de la forma $4k + 1$ se expresa (de modo único salvo orden y signos) como

$$p = x^2 + y^2, \quad x, y \in \mathbb{Z}.$$

4. **Método de factorización de Fermat.** Para factorizar N , busca enteros x, y tales que

$$N = x^2 - y^2 = (x - y)(x + y).$$

5. **Principio de Fermat (óptica).** La trayectoria de la luz entre dos puntos es aquella para la cual el tiempo de recorrido es estacionario (mínimo o máximo).

6. **Teorema de Fermat en cálculo.** Si f alcanza un extremo local en x_0 y es diferenciable en dicho punto, entonces

$$f'(x_0) = 0.$$

7. **Método del descenso infinito.** Técnica de demostración por contradicción que construye, a partir de una solución mínima supuesta, otra estrictamente menor, generando una contradicción.

8. **Teorema de los números poligonales.** Todo entero positivo puede escribirse como suma de n números poligonales de orden n .

Antecedentes

El concurso de matemáticas Pierre Fermat, nace a instancias de un grupo de estudiantes de la ESFM, que habiendo participado en olimpiadas de matemáticas, pensaron en un evento semejante para la ESFM. Estos estudiantes Ernesto Lupercio Lara, José Luis Flores Silva, Luis Cruz Romo, entre otros, piden y logran que las autoridades de la ESFM, organicen el concurso pensado por ellos. De esta manera nace en 1990, el primer Concurso de Matemáticas Pierre Fermat, coordinado y fuertemente apoyado por el Profesor Fabio Dávila Ojeda y por el estudiante Francisco Zaragoza Martínez. Así pues, este concurso, comienza localmente para estudiantes de ESFM y algunos otros de nivel medio superior y secundaria que se logró captar. Además, el concurso fué fuertemente influenciado por las olimpiadas de matemáticas. Este grupo de estudiantes y profesores se disgrega en 1996, dando con ello término a la primera época del concurso. En la segunda época del concurso que da inicio en 2002, se le da el carácter de nacional al abrirse a estudiantes de toda la república y al eliminarse las restricciones en cuanto a edad de los concursantes. Se le desvincula de las olimpiadas, se introducen nuevos temas para evaluar a los concursantes y se eliminan los problemas “tipo olimpiada”, obteniendo así un concurso propio de la ESFM. Actualmente el concurso Nacional de Matemáticas Pierre Fermat es parte de la “huella académica” de la ESFM y es un instrumento útil para evaluar el estado que guarda la educación matemática en México.

Objetivo

La ESFM, preocupada por la poca preparación matemática básica de la que hacen gala algunos alumnos de nuevo ingreso al IPN, se ha dado a la tarea de organizar el concurso Pierre Fermat, persiguiendo entre otros objetivos, el despertar el amor por las matemáticas en los estudiantes, captar alumnos y tener un patrón de referencia de la educación matemática en México.

Población

El concurso Pierre Fermat está dirigido a estudiantes de los niveles secundaria, medio superior y superior.

Concurso Nacional Pierre Fermat 2024

Escuela Superior de Física y Matemáticas del I.P.N.

REGISTRO

El concurso consta de tres niveles

Secundaria, Medio Superior y Superior.

Requisitos

1. Estar inscrito en cualquier escuela pública o privada del país.
2. El nivel inscrito en su escuela debe coincidir con el nivel en el que participarán en el concurso, por lo que se debe presentar un comprobante de estudios vigente (credencial o constancia) al momento de presentarse a la fase eliminatoria. En caso de estar en etapa de transición de un nivel a otro (secundaria - medio superior, medio superior - superior) presentará examen en el nivel que estaban en el momento de registrarse.

Etapas del concurso

1. **Registro:** 6 de mayo al 12 de julio de 2025 en <https://www.esfm.ipn.mx/pierre-fermat.html>
2. **Eliminatoria:** 19 de julio de 2025, de las 10:00 a las 13:00 horas en todas las sedes. Consiste de un examen de 25 preguntas de opción múltiple con un tiempo límite de 3 horas. Aquellos que obtengan mejor calificación pasarán a la siguiente etapa.
3. **Final:** 27 de septiembre de 2025 de las 10:00 a las 14:00 horas en la ESFM - IPN y las sedes autorizadas. Consiste de un examen de cinco preguntas abiertas con un tiempo límite de 4 horas.
4. **Premiación:** 28 de noviembre de 2025 a las 12:00 horas en el Auditorio "Víctor Flores Maldonado" de la ESFM-IPN.

Todos los concursantes recibirán diploma de participación, por lo que es importante que al registrarse escriban sus datos correctamente. Los ganadores obtendrán diploma y un presente de nuestros patrocinadores. También se otorgarán menciones honoríficas a aquellos cuyas soluciones hayan sido destacadas.

La inscripción es gratuita, se realizará de manera electrónica en la página del concurso.

Concurso Nacional Pierre Fermat 2025

Escuela Superior de Física y Matemáticas

Guía Secundaria

Problema 1.

Calcula la suma hasta el término 16 de la serie:

$$\frac{1^3}{1} + \frac{1^3 + 2^3}{1 + 3} + \frac{1^3 + 2^3 + 3^3}{1 + 3 + 5} + \dots$$

a) 245

b) 725

c) 446

d) 335

Problema 2.

Calcula la distancia del punto $(3, 2)$ a la recta que tiene por ecuación $y = 3 - 2x$.

a) $\frac{4}{\sqrt{5}}$

b) $\sqrt{5}$

c) 2

d) 2.449489

Problema 3.

¿Cuál es la suma de los 6 ángulos marcados en la figura?

a) 1360°

b) 1240°

c) 1060°

d) 1080°

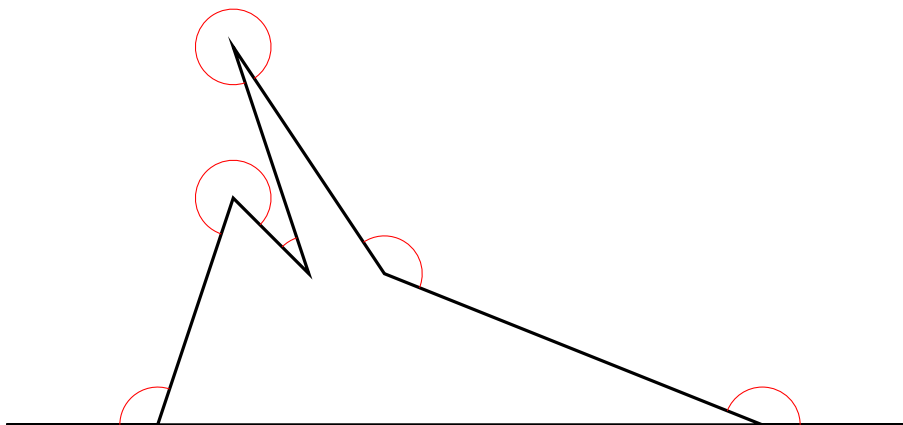


Figura 1: Gráfica para el Problema 3

Problema 4.

Un triángulo cuyos ángulos son A, B, C , satisface que B es el triple del ángulo A y C es una sexta parte de B . ¿Cuáles son los valores de los ángulos?

$$\begin{aligned} A &= \frac{2\pi}{9}, \\ \text{(a)} \quad B &= \frac{2\pi}{3}, \\ C &= \frac{\pi}{9} \end{aligned}$$

(b) $\begin{aligned} A &= 120^\circ, \\ B &= 40^\circ, \\ C &= 20^\circ \end{aligned}$

(c) $\begin{aligned} A &= \frac{2\pi}{3}, \\ B &= \frac{2\pi}{9}, \\ C &= \frac{2\pi}{9} \end{aligned}$

(d) $\begin{aligned} A &= 20^\circ, \\ B &= 60^\circ, \\ C &= 100^\circ \end{aligned}$

Problema 5.

Con centro en los vértices y en los puntos medios de los lados de un triángulo equilátero de lado 4 se trazan arcos de círculo para formar la figura que se muestra. ¿Cuánto vale el área sombreada?

a) $4\pi - 6\sqrt{3}$

b) $2\pi - 3\sqrt{3}$

c) $4\pi + 6\sqrt{3}$

d) $2\pi + 2.5\sqrt{3}$

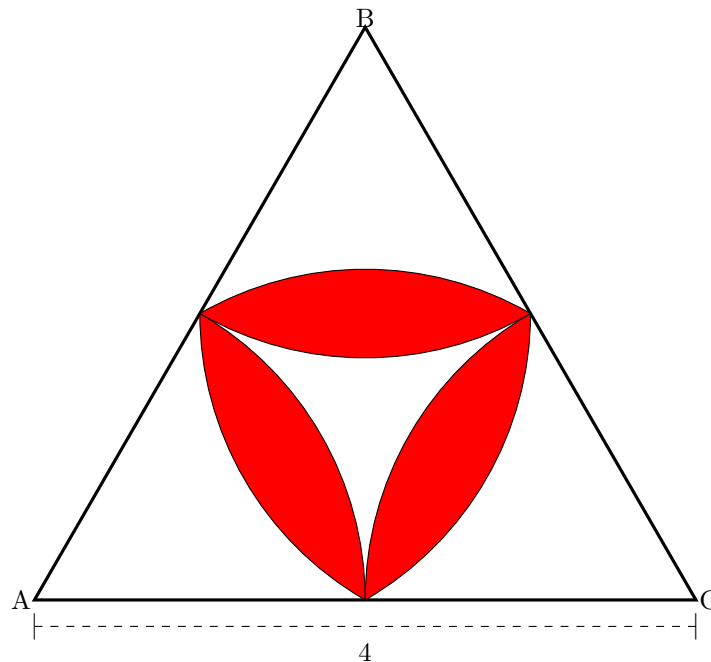


Figura 2: Gráfica para el Problema 5

Problema 6.

En la figura hay 5 cuadrados. Si el cuadrado más pequeño tiene área 1, ¿Cuál es el valor de h ?

a) 5

b) 3

c) 4

d) 4.5

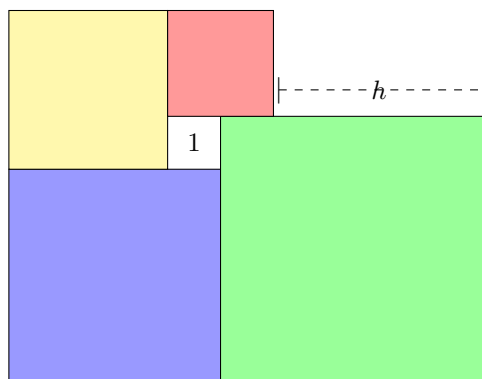


Figura 3: Dibujo para el Problema 6

Problema 7.

Dado un 2025-ágono regular, encuentra el menor k tal que entre cualesquiera k vértices del polígono haya 4 tal que el cuadrilátero convexo que forman comparte 3 lados del polígono

- a) 1012 b) 1014 **c) 1013** d) 1005

Problema 8.

Si se lanzan tres dados y la suma de los números en las quince caras visibles es 46. ¿Cuál es el producto de los tres números en las caras ocultas, es decir, los números en las bases de los dados?

- a) 1 b) 24 c) 160 **d) 180**

Problema 9.

¿Cuál es el valor de la fracción $\frac{1 + \log 126}{2 \log 3 + \log 2 + \log 70}$?

- a) -2 b) -1 **c) 1** d) 2

Problema 10.

En la Física, la mecánica clásica es una de las áreas fundamental en su desarrollo, en donde la velocidad, la aceleración, el desplazamiento y el tiempo son factores esenciales en el movimiento de los cuerpos. Las fórmulas fundamentales son

$$v_f = v_0 + at \quad \text{y} \quad d = t \cdot \frac{v_f + v_0}{2}$$

donde v_0 es la velocidad inicial, v_f es la velocidad final, a es la aceleración, t el tiempo y d es el desplazamiento. Note que la fórmula del desplazamiento está dada en función del tiempo. ¿Cuál de las siguientes fórmulas es la correcta, deducida de las dos fórmulas anteriores, que establezcan el desplazamiento en función de la aceleración?

- a) $d = \frac{v_f + v_0}{2a}$ **b) $d = \frac{v_f^2 - v_0^2}{2a}$** c) $d = \frac{v_f - v_0}{2a}$ d) $d = \frac{v_f^2 + v_0^2}{2a}$

Problema 11.

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función cuadrática, es decir, para cada $x \in \mathbb{R}$ se deberá de tener que $f(x) = ax^2 + bx + c$ para ciertas constantes reales a, b, c , con $a \neq 0$. Si la gráfica de f pasa por los puntos del plano $(-1, 2)$ y $(1, 3)$ y, además, $f(0) = -1$ entonces, ¿cuáles son los valores de las constantes a y b ?

a) $a = \frac{7}{2}$ y $b = \frac{1}{2}$

b) $a = -\frac{7}{2}$ y $b = \frac{1}{2}$

c) $a = \frac{7}{2}$ y $b = -\frac{1}{2}$

d) $a = -\frac{7}{2}$ y $b = -\frac{1}{2}$

Problema 12.

Se mezcla trigo a \$5790.00 la tonelada con cebada a \$4980.00 la tonelada, dando como resultado una mezcla de \$5450.00 la tonelada. Si las toneladas de cebada son inferiores en 6 toneladas de trigo, ¿cuántas toneladas x de trigo y cuántas toneladas y de cebada se utilizaron para realizar la mezcla?

a) $a = \frac{7}{2}$ y $b = \frac{1}{2}$

c) $a = \frac{7}{2}$ y $b = -\frac{1}{2}$

b) $a = -\frac{7}{2}$ y $b = \frac{1}{2}$

d) $a = -\frac{7}{2}$ y $b = -\frac{1}{2}$

Problema 13.

¿Cuál es el conjunto solución de la ecuación $\cos(2x) + \sin^2(x) = 1$?

a) $\mathbb{R}$

c) $\{k\pi \in \mathbb{R} \mid k \in \mathbb{Z}, \text{ con } k \text{ par}\}$

b) $\{k\pi \in \mathbb{R} \mid k \in \mathbb{Z}, \text{ con } k \text{ impar}\}$

d) $\{k\pi \in \mathbb{R} \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Problema 14.

Un edificio se encuentra situado en la orilla opuesta de un río. La visual del extremo superior del edificio desde un cierto punto forma un ángulo de elevación de 30° . Aproximándonos 23 m hacia la orilla del río, el ángulo es de 45° . ¿Cuál es la altura del edificio?

a) $\frac{23\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}}$

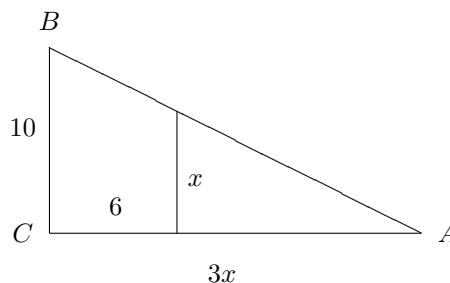
b) $\frac{23\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}$

c) $\frac{23\sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}}$

d) $\frac{23\sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}}$

Problema 15.

Considere la figura de un triángulo rectángulo $\triangle ABC$ que se muestra abajo, con los datos que se expresan en la misma. ¿Cuál es el valor de x ?



a) 3.5

b) $5 + 2\sqrt{5}$

c) $5 - 2\sqrt{5}$

d) 2.5

Problema 16.

Un cuadrado con una área de 12 unidades cuadradas está inscrito en un círculo. ¿Cuántas unidades debe medir el perímetro del círculo?

a) $2\pi\sqrt{3}$

b) $3\pi\sqrt{2}$

c) $2\pi\sqrt{6}$

d) $3\pi\sqrt{6}$

Problema 17.

Encontrar el enunciado que es falso.

a) El conjunto vacío es un subconjunto de cualquier conjunto.

b) Hay polinomios con coeficientes racionales que no tienen ninguna raíz real.

c) Los conjuntos de números naturales, enteros y racionales, tienen la misma cantidad de elementos.

d) No todo número entero positivo se puede escribir como producto de potencias de números primos.

Problema 18.

Cuál de las siguientes listas de números contiene a todos los valores de los coeficientes que se obtienen al desarrollar la expresión $(a+b)^5$.

a) 5, 4, 3, 2, 1, 0

b) 1, 5, 10, 10, 5, 1

c) 5, 5, 5, 10, 10, 10

d) 1, 5, 10, 1, 1

Problema 19.

Cuántos subconjuntos con cuatro elementos se pueden formar del conjunto

$$A := ((\{a, b, c, d, e, f, g, h\} \cap \{b, c, d, g, h\}) \cup \{b, c, j, h, g, k, m, p\}) \times \{1, 2\}.$$

a) 3060

b) 23

c) 2^{23}

d) 816

Problema 20.

Qué afirmación es verdadera, al tomar los polinomios $p(x) = 2x^4 + 7x^3 + x^2 - 5x - 1$ y $q(x) = 2x + 1$?

a) El polinomio $q(x)$ divide a $p(x)$.

b) Los polinomios son primos relativos.

c) El polinomio $p(x)$ divide a $q(x)$.

d) El residuo de la división es un polinomio de grado 3.

Problema 21.

Identificar quién es el recíproco del número q , si $-1 < a < 1$

$$q = \sum_{k=0}^{\infty} a^k.$$

a) $\frac{1}{1-q}$.

b) $1-a$.

c) $1-q$.

d) $\frac{1}{1-a}$.

Problema 22.

Al tomar la sucesión de números

$$x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = \frac{1}{3}, \dots, x_n = \frac{1}{n}, \dots$$

Y el conjunto $A_m = \left[0, \frac{1}{2^m}\right]$, considerando m un número natural. Qué enunciado es verdadero?

a) Los conjuntos A_m serán tan pequeño que no habrá ningún elementos de sucesión.

b) En la intersección de todos los conjuntos A_m no habrá ningún elemento de la sucesión.

c) A_m sólo contiene una cantidad finita de elementos de la sucesión.

d) Habrá una infinidad de elementos de la sucesión fuera del conjunto A_m .

Problema 23.

Tomar una recta L y un punto x en el plano, que no se intersecten.Cuál es el punto sobre la recta L más cercano a x ?

a) El punto de intersección de la recta L y la recta que une a x con el origen de coordenadas.

b) El punto de intersección de la recta L y la recta que pasa por x formando un ángulo de $\frac{\pi}{4}$ entre esta y L .

c) El punto de intersección de la recta L y la recta que pasa por x que es paralela a L .

d) El punto de intersección de la recta L y la recta que pasa por x que es perpendicular a L .

Problema 24.

Calcular el perímetro P y área A de un dodecágono regular, si uno de sus lados mide 2 unidades y el radio 3 unidades?

a) $P = 24, A = 24\sqrt{2}$.

c) $P = 20, A = 20\sqrt{2}$.

b) $P = 12, A = 12\sqrt{2}$.

d) $P = 120, A = 120\sqrt{2}$.

Problema 25.

La suma de los ángulos internos de un polígono convexo es 1440° . ¿Cuántos lados tiene dicho polígono?

a) 8

b) 9

c) 10

d) 11

Concurso Nacional Pierre Fermat 2025

Escuela Superior de Física y Matemáticas

Guía Medio Superior

Problema 1.

Hallar

$$I = \int (x - \alpha)^{p-1} (x - \beta)^{-p-1} dx, \quad p \geq 0, \alpha \neq \beta.$$

a) $\frac{1}{p(\alpha - \beta)} \left(\frac{x - \alpha}{x - \beta} \right)^p + c$

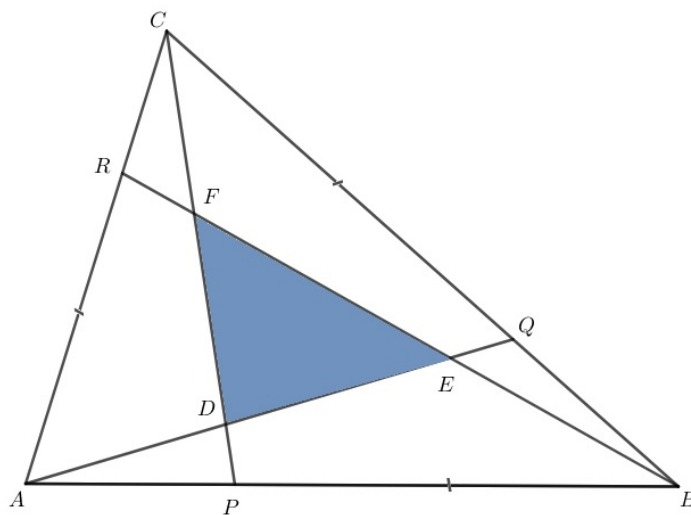
b) $\frac{1}{(\alpha - \beta)} \left(\frac{x - \alpha}{x - \beta} \right)^p + c$

c) $\frac{1}{p(\beta - \alpha)} \left(\frac{x - \alpha}{x - \beta} \right)^p + c$

d) $\frac{1}{p(\alpha - \beta)} \left(\frac{x - \beta}{x - \alpha} \right)^p + c$

Problema 2.

Considere el triángulo $\triangle ABC$. Si cada uno de los tres lados se divide en tres partes iguales y, desde cada vértice, se traza un segmento hasta el punto que corresponde a la tercera parte del lado opuesto, ¿cuál es la razón entre el área del triángulo $\triangle DEF$ (determinado por estos segmentos) y el área del triángulo original?



a) $\frac{\triangle DEF}{\triangle ABC} = \frac{1}{13}$

b) $\frac{\triangle DEF}{\triangle ABC} = \frac{1}{7}$

c) $\frac{\triangle DEF}{\triangle ABC} = \frac{2}{13}$

d) $\frac{\triangle DEF}{\triangle ABC} = \frac{2}{7}$

Problema 3.

Si la longitud de una circunferencia es 100 cm, ¿cuál es la longitud, en centímetros, del lado de un cuadrado inscrito en ella?

a) $\frac{25\sqrt{2}}{\pi}$

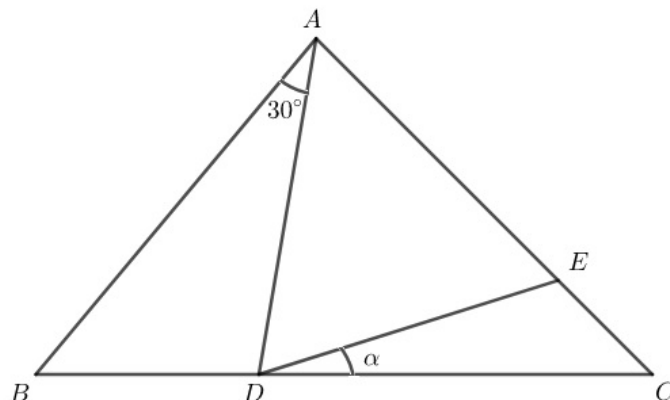
b) $\frac{50\sqrt{2}}{\pi}$

c) $\frac{100}{\pi}$

d) $\frac{100\sqrt{2}}{\pi}$

Problema 4.

En la siguiente figura, considere que $\overline{AB} = \overline{AC}$, $\angle BAD = 30^\circ$ y $\overline{AE} = \overline{AD}$. ¿Cuál es la medida del ángulo α ?



a) 7.5°

b) 10°

c) 12.5°

d) 15°

Problema 5.

Un triángulo equilátero de lado 2 se divide en un triángulo y un trapecio mediante una recta paralela a uno de sus lados. Si el área del trapecio es la mitad del área del triángulo original, ¿cuál es la longitud del segmento que une los puntos medios de los lados no paralelos del trapecio?

a) $\sqrt{2}$

b) $2 + \sqrt{2}$

c) $\frac{2 + \sqrt{2}}{2}$

d) $\frac{2\sqrt{3} - \sqrt{6}}{2}$

Problema 6.

Considere la siguiente sumatoria

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+3}{(n+1)(n+2)}.$$

¿Cuál es su suma?

a) $\frac{1}{2}$

b) 1

c) 2

d) $\frac{5}{2}$

Problema 7.

Considere la siguiente serie

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1) \cdot 2n \cdot (2n+1)} + \cdots.$$

¿Cuál es su suma?

a) $\log 2$

b) $2 \log 2$

c) $\ln 2$

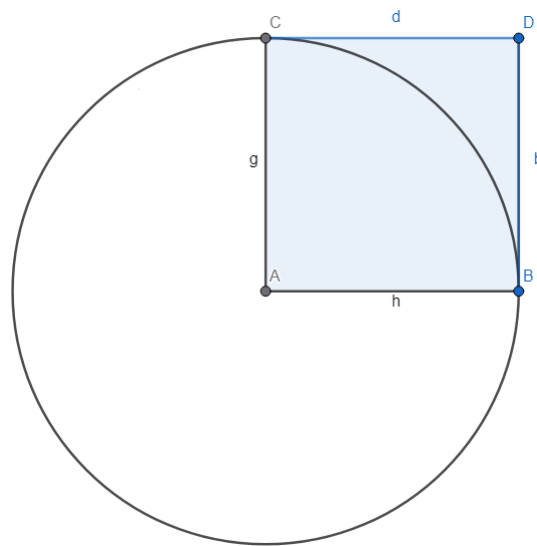
d) $2 \ln 2$

Problema 8. ¿Qué condiciones deben cumplirse para que $a^{12} - b^{12}$ sea divisible entre 91?

a) Basta que a sea primo respecto a 91c) Que a y b sean ambos primos respecto a 91b) Basta que b sea primo respecto a 91d) Para cualesquiera a y b se cumple

Problema 9.

¿Cuánto mide el radio de la circunferencia, si la diagonal del cuadrado mide a unidades?



a) a

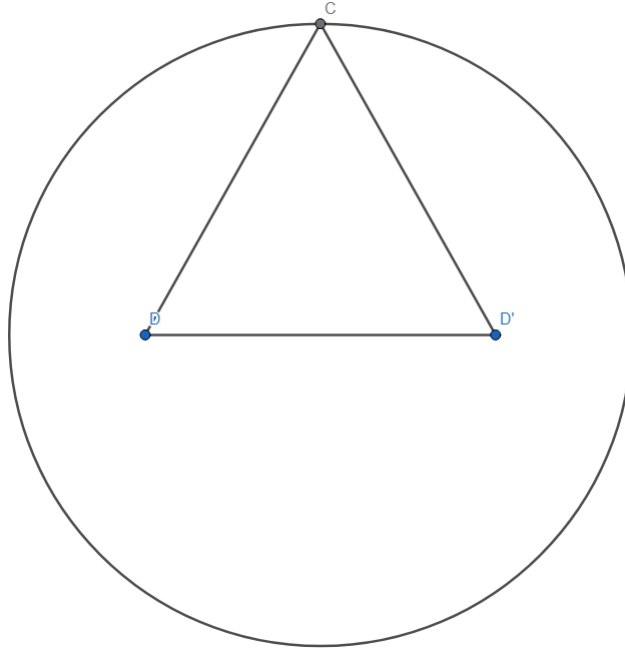
b) $\sqrt{2}a$

c) $\frac{a}{\sqrt{2}}$

d) $\frac{a}{2}$

Problema 10.

¿Cuánto mide el radio de la circunferencia, si la base del triángulo equilátero esta sobre la línea diametral del círculo y el triángulo tiene un área de a unidades cuadradas?



a) $\frac{\sqrt{3}}{2}a$

b) $\frac{\sqrt{2}}{3}a$

c) $\frac{a}{\sqrt[4]{3}}$

d) $\sqrt[4]{3}a$

Problema 11.

¿Cuántas soluciones enteras tiene $x^3 + 3^x = 1$? Justifica tu respuesta

a) 0

b) 1

c) 2

d) 3

Problema 12.

¿Cuántas soluciones enteras tiene $x^3 - 3^x = -1$? Justifica tu respuesta

(a) 1

(b) 2

(c) 3

(d) 4

Problema 13.

Dada la sucesión $\{a, a, a+1/2, a+1/2, a+1, a+1, a+3/2, a+3/2, \dots\}$ ¿Cuál es término 2025?

(a) $a + 505.5$

(b) $a + 506.0$

(c) $a + 506.5$

(d) $a + 507.0$

Problema 14.

Dada la sucesión $\{a, a, a+1/2, a+1/2, a+1, a+1, a+3/2, a+3/2, \dots\}$ ¿Cuál es el primer término que sobre pasa 2025, si $a=1$?

(a) 8098

(b) 8099

(c) 8100

(d) 8101

Problema 15.

¿Cual es la parte entera de la solución del siguiente sistema ?
$$\begin{aligned} x^3 - 7y &= 10 \\ x^2 - y^2 &= 4 \end{aligned}$$

(a) $x = 0, y = 2$

(b) $x = 2, y = 0$

(c) $x = 1, y = 2$

(d) $x = 2, y = 1$

Problema 16.

¿Cual es la solución real del siguiente sistema ?

$$x^3 - y^3 = 5$$

$$x^3 + y^3 = 1$$

(a) $x = \sqrt[3]{3}, y = -\sqrt[3]{2}$

(c) $x = \sqrt{3}, y = -\sqrt[3]{2}$

(b) $x = -\sqrt[3]{2}, y = \sqrt{3}$

(d) $x = -\sqrt{2}, y = \sqrt{3}$

Problema 17.

Sean a, b, c los lados de un triángulo y S su área. Demostrar que se cumple la siguiente desigualdad:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S$$

¿En qué caso se alcanza la igualdad?

a)) Cuando el triángulo es isósceles y rectángulo.

c) Cuando el triángulo es equilátero.

b) Cuando el triángulo es escaleno con ángulos distintos.

d) Cuando el triángulo tiene un ángulo recto.

Problema 18.

Las raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ son p y q . La ecuación cuyas raíces son $ap + b$ y $aq + b$ es:

a) $x^2 - bx - ac = 0$

c) $x^2 + b(2 - a)x + a^2c + b^2(a + 1) = 0$

b) $x^2 + 3bx + ca + 2b^2 = 0$

d) $x^2 - bx + ac = 0$

Problema 19.

Sean α, β y γ los ángulos de un triángulo cualquiera. Considere el producto:

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right).$$

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera con respecto a ese producto?

a) El producto puede ser igual a $\frac{1}{4}$

b) El producto es máximo cuando el triángulo es rectángulo

c) El producto es siempre menor que $\frac{1}{4}$

d) El producto alcanza $\frac{1}{4}$ cuando el triángulo es equilátero

Problema 20.

El jefe de un autolavado les dice a sus trabajadores que por n autos lavados, les pagará $an^3 + b$ pesos. Si uno de ellos gana 5 pesos por lavar 1 auto, y otro gana 83 pesos por lavar 3 autos, ¿cuántos autos lavó un trabajador que ganó 26 pesos?

a) 2 autos

b) 4 autos

c) 5 autos

d) 6 autos

Problema 21.

Encontrar todas las decenas de números enteros (10 números) que tienen la siguiente propiedad: al sumar nueve de ellos se obtiene como resultado uno de los siguientes valores: 82, 83, 84, 85, 87, 89, 90, 91 o 92.

¿Cuáles decenas cumplen con esta propiedad?

a) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

c) 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12

b) 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11

d) 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13

Problema 22.

¿Cuál es la mayor cantidad de regiones en que se puede dividir un plano utilizando un círculo, un triángulo y un cuadrado?

a) 14

b) 16

c) 18

d) 20

Problema 23.

Una circunferencia pasa por los puntos $(1, 3)$ y $(5, 1)$. Además, uno de sus diámetros es paralelo al eje de las abscisas. ¿Cuál es el área de dicha circunferencia?

a) 5π

b) 8π

c) 10π

d) 12π

Problema 24.

Calcule el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin 2x}{x + \sin 3x}$$

a) $-\frac{1}{5}$

b) 0

c) $\frac{1}{5}$

d) 1

Problema 25.

Calcule la derivada de la función:

$$y = \frac{x}{|x|}$$

a) $y' = 1$

b) $y' = -1$

c)

$$y' = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ \text{no existe,} & x = 0 \end{cases}$$

d)

$$y' = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Concurso Nacional Pierre Fermat 2025

Escuela Superior de Física y Matemáticas

Guía Superior

Problema 1.

Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n 2^n$ converge, entonces:

a) $\sum_{n=k+1}^{\infty} |a_n| > \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ para algún natural k .

b) $\sum_{n=k+1}^{\infty} |a_n x^n| \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}}$ para todo $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ y para algún $k \in \mathbb{N}$.

c) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$ no converge.

d) Ninguna opción es verdadera.

Problema 2.

Elija la opción verdadera:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+n+n^2} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2} \right) = 0$.

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+n+n^2} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2} \right) = 1$.

c) La serie $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt[n]{1+n+n^2} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2} \right)$ no converge.

d) Ninguna opción es verdadera.

Problema 3.

Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función de clase C^1 . Entonces:

a) Si $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y A contiene sus puntos de acumulación, entonces $f(A)$ también contiene sus puntos de acumulación y existe $r > 0$ tal que $f(A) \subseteq B(0_{\mathbb{R}^n}, r)$.

b) Si $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ es una sucesión en $\mathbb{R}^n$ que converge a $p \in \mathbb{R}^n$ y $A = \{x_m : m \in \mathbb{N}\} \cup \{p\}$ entonces $f(A) = \overline{f(A)} \subset B(0_{\mathbb{R}^n}, r)$ para algún $r > 0$.

c) $Df(0_{\mathbb{R}^n})$ es discontinua en $0_{\mathbb{R}^n}$.

d) Ningún inciso es verdadero.

Problema 4.

Elija la opción verdadera:

a) Sea A una matriz simétrica $n \times n$ de entradas reales. Si λ es un valor propio de A entonces $\lambda = \bar{\lambda}$ y sus vectores columnas son una base para $\mathbb{R}^n$.

b) En $\mathbb{R}^2$ definimos $(x, y) + (w, z) = (x + w - 1, y + z - 1)$ y $c(x, y) = (cx, cy)$. $\mathbb{R}^2$ con estas operaciones es un espacio vectorial y $W = \{(x, 2x) : x \in \mathbb{R}\}$ es un subespacio.

c) Sea A una matriz simétrica $n \times n$ de entradas reales. Si ningún valor propio de A es cero entonces A es invertible.

d) Ninguna de las opciones anteriores es verdadera.

Problema 5.

Elija la opción verdadera:

a) Sea $g(t) = \left(F(t) - \int_{-1}^t x^2 e^{x^2} dx \right)$ diferenciable en $\mathbb{R}$. Si g tiene un mínimo local entonces F también.

b) La sucesión $\{s_m\}_{m=1}^{\infty}$ donde $s_m = \sum_{n=1}^m \sqrt{\frac{1}{n^3 + n}}$, está acotada.

c) Si $B_{n+1} \subseteq B_n \subseteq \left[1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{3}{n}\right]$ donde $B_n = [a_n, b_n]$, entonces $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \emptyset$.

d) Ninguna de las opciones anteriores es verdadera.

Problema 6.

La suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ es:

a) $+\infty$

b) 2

c) No existe

d) $-\infty$

Problema 7.

¿Cuál de los siguientes enunciados es verdadero?

a) Existen números irracionales x, z tales que $x^z \in \mathbb{Q}$.

b) El conjunto $A = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ es denso en $\mathbb{R}$.

c) Si $c \in \mathbb{R}$, entonces el conjunto $B = \{cr : r \in \mathbb{Q}\}$ es denso en $\mathbb{R}$.

d) Si $c \in \mathbb{R}$, entonces el conjunto $B = \{cr : r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$ es denso en $\mathbb{R}$.

Problema 8.

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1 - x & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Determine cuál de los siguientes enunciados es verdadero:

a) El único punto en donde f es continua es $x = \frac{1}{2}$.

b) f es Riemann integrable sobre $[0, 1]$.

c) f es derivable en $x = \frac{1}{2}$.

d) f es uniformemente continua sobre $[0, 1]$.

Problema 9.

Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio con producto interno. Si $T : V \rightarrow V$ es un operador lineal tal que

$$\langle T(u), u \rangle = 0, \quad \forall u \in V.$$

Determine cuál de los siguientes enunciados es verdadero:

a) Si $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto interno sobre los reales, entonces $T = 0$.

b) Si $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto interno sobre los complejos, entonces $T = 0$.

c) Si $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto interno sobre los racionales, entonces $T = 0$.

d) $T = 0$ independientemente del campo en donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ toma sus valores.

Problema 10.

¿Cuál de los siguientes enunciados es verdadero?

a) Existe una función derivable f tal que $[f(x)]^5 + f(x) + x = 0, \forall x \in \mathbb{R}$, y $f'(x) = \frac{1}{-5(f(x))^4 - 1}, \forall x \in \mathbb{R}$.

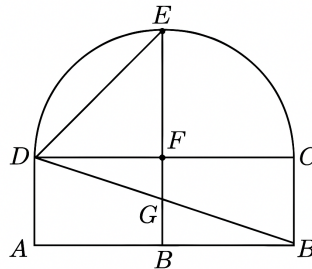
b) Existe una función derivable f tal que $[f(x)]^5 + f(x) + x = 0, \forall x \in \mathbb{R}$, y $f'(x) = \frac{1}{-5(f(x))^4}, \forall x \in \mathbb{R}$.

c) Existe una función derivable f tal que $[f(x)]^5 + f(x) + x = 0, \forall x \in \mathbb{R}$, y $f'(x) = \frac{1}{-5(f(x))^4 - x}, \forall x \in \mathbb{R}$.

d) Existe una función derivable f tal que $[f(x)]^5 + f(x) + x = 0, \forall x \in \mathbb{R}$, y $f'(x) = \frac{1}{-5(f(x))^4 - f(x)}, \forall x \in \mathbb{R}$.

Problema 11.

Sea $ABCD$ un rectángulo tal que $AB = \sqrt{2} BC$. Sea E un punto sobre la semicircunferencia de diámetro AB , y sean F y G los puntos de intersección de los segmentos DE y CE con el segmento AB , respectivamente.



¿Cuál de las siguientes igualdades es verdadera?

a) $AG^2 + BF^2 = AB^2$

c) $AG + BF = AB$

b) $AG^2 + FG^2 = AB^2$

d) $AG^2 - BF^2 = AB^2$

Problema 12.

Calcular el siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \cos \beta & \sin \alpha \sin \beta \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \cos \beta & \cos \alpha \sin \beta \\ 0 & -\sin \beta & \cos \beta \end{vmatrix}$$

a) 0

b) 1

c) $\cos(\alpha + \beta)$

d) $\cos(\alpha - \beta)$

Problema 13.

Sea $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, una función tal que $\frac{\partial F}{\partial x}$ y $\frac{\partial F}{\partial y}$ existen y son continuas en $\mathbb{R}^2$. Suponga, además, que se cumple la condición:

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \quad \text{para todo } (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

a) $F(x, y) = f(xy)$ para alguna función derivable $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

b) $F(x, y) = f(x - y)$ para alguna función derivable $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

c) $F(x, y) = f(x + y)$ para alguna función derivable $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

d) $F(x, y) = f(x^2 + y^2)$ para alguna función derivable $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Problema 14.

Sea $\mathcal{V}$ el $\mathbb{R}$ -espacio vectorial de todas las funciones continuas de $[0, 1]$ a $\mathbb{R}$. Sea $g \in \mathcal{V}$ una función fija. Se define la función $\varphi_g : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ como:

$$\varphi_g(f) = \int_0^1 fg$$

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

a) φ_g es lineal para toda g , y $\varphi_g(f) = 0$ para toda $g \in \mathcal{V}$ implica que $f = 0$.

b) φ_g es constante para toda g , y no es lineal.

c) φ_g es lineal solo si $g = 1$.

d) φ_g no puede ser una funcional lineal ya que depende de g .

Problema 15.

Sea $A \in M_{10}(\mathbb{R})$. Si el polinomio mínimo de A es $x(x-1)^2(x+7)^2$, ¿cuántas y de qué forma son las posibles formas canónicas de Jordan de la matriz A ?

a) Existen 8 formas de Jordan posibles, una para cada permutación de bloques Jordan de tamaño 1 y 2.

b) Existen 2 formas posibles, una con bloques Jordan máximos y otra con todos los bloques de tamaño 1.

c) Existen 6 formas posibles, ya que los bloques Jordan deben sumar dimensión 10 respetando los grados del polinomio mínimo.

d) Solo existe una forma canónica de Jordan posible, porque el polinomio mínimo determina completamente la estructura.

Problema 16.

Demostrar o refutar:

Sea $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. ¿Es cierto que A y B tienen los mismos valores propios si y solo si A y B conmutan?

a) Sí, siempre que dos matrices tengan los mismos valores propios, entonces conmutan.

b) No, tener los mismos valores propios no implica que las matrices conmutan.

c) Sí, porque compartir espectro es equivalente a conmutar.

d) No, solo si las matrices son diagonales simultáneamente se garantiza que tengan mismos autovalores.

Problema 17.

Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x, y) = \begin{cases} xy & \text{si } |y| \leq |x| \\ -xy & \text{si } |y| > |x| \end{cases}$$

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera respecto a f en el punto $(0, 0)$?

a) f no es continua en $(0, 0)$ y no tiene plano tangente.

b) f es continua en $(0, 0)$ pero no es derivable.

c) f es continua y diferenciable en $(0, 0)$, y su plano tangente es $z = 0$.

d) f es discontinua en todo $\mathbb{R}^2$.

Problema 18.

Sean $a_0, a_1, a_2, \dots$ números tales que:

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - 2)^n$$

para todo $x \in (0, 1)$. Calcule:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n}$$

a) 1

b) 2

c) $\frac{1}{2}$

d) ∞

Problema 19.

Un par ordenado $(\mathbb{F}, P)$ se llama *campo ordenado* si $\mathbb{F}$ es un campo, $P \subset \mathbb{F}$, y se cumplen las siguientes condiciones:

- Para toda $a, b \in \mathbb{F}$, se tiene $a + b \in \mathbb{F}$
- Para toda $a, b \in \mathbb{F}$, se tiene $ab \in \mathbb{F}$
- Para todo $a \in \mathbb{F}$, se cumple exactamente una de las siguientes:

$$a \in P \quad \text{o} \quad a = 0 \quad \text{o} \quad -a \in P$$

Demuestre que en el campo de los números complejos $\mathbb{C}$, no existe ningún subconjunto P tal que $(\mathbb{C}, P)$ sea un campo ordenado.

a) Porque $i^2 = -1 \notin P$, lo que contradice el cierre multiplicativo.

b) Porque $\mathbb{C}$ no tiene inversos aditivos.

c) Porque $\mathbb{C}$ tiene infinitos elementos y no se puede ordenar.

d) Porque $\mathbb{C}$ no cumple la ley distributiva con respecto al subconjunto P .

Problema 20.

Hallar $\int_0^1 f(t) dt$, si:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{k}{k+1} & \text{si } x \in \left(1 - \frac{1}{k+1}, 1 - \frac{1}{k}\right) \text{ con } k \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) 1

b) $\ln 2$

c) $\frac{1}{2}$

d) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$

Problema 21.

Sea $f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ una función continua de soporte compacto (es decir, existe $b > 0$ tal que $f(x) = 0$ para todo $x > b$).

Se define la función $g : (0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ como:

$$g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$$

Demuestre cuál de las siguientes desigualdades es verdadera para todo $p > 1$.

a) $\int_0^{+\infty} g(x)^p dx \geq \int_0^{+\infty} f(x)^p dx$

b) $\int_0^{+\infty} g(x)^p dx = \int_0^{+\infty} f(x)^p dx$

c) $\int_0^{+\infty} g(x)^p dx \leq \frac{p}{p-1} \int_0^{+\infty} f(x)^p dx$

d) $\int_0^{+\infty} g(x)^p dx \leq \left(\int_0^{+\infty} f(x)^p dx \right)^p$

Problema 22.

Sea A un conjunto no vacío. Sean R y S dos relaciones en A . Se define la composición $R \circ S$ como:

$$a R \circ S b \iff \exists c \in A \text{ tal que } a R c \text{ y } c S b$$

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

a) La composición de relaciones es conmutativa y siempre produce relaciones de equivalencia.

b) La composición de relaciones es asociativa, pero no necesariamente produce una relación de equivalencia.

c) Si R y S son reflexivas, entonces $R \circ S$ siempre es simétrica.

d) Si R y S son de equivalencia, entonces $R \circ S$ también lo es.

Problema 23.

Sea $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 2$. Encuentre una función $g_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para toda función continua $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ se cumpla la igualdad:

$$\int_0^1 \int_0^{x_1} \cdots \int_0^{x_{n-1}} f(x_n) dx_n \cdots dx_1 = \int_0^1 g_n(t) f(t) dt$$

¿Cuál es la función $g_n(t)$ que satisface esta propiedad?

a) $g_n(t) = t^{n-1}$

b) $g_n(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$

c) $g_n(t) = \frac{t^n}{n!}$

d) $g_n(t) = \frac{1}{n}$

Problema 24.

Sea $\varphi : K \rightarrow F$ un homomorfismo de campos, es decir:

$$\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b), \quad \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) \quad \text{para cada } a, b \in K.$$

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

a) Todo homomorfismo de campos es biyectivo.

b) φ siempre es sobreyectivo, aunque no sea inyectivo.

c) Un homomorfismo de campos es cero o inyectivo.

d) Si φ no es inyectivo, entonces su núcleo es un ideal propio de F .

Problema 25.

Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y $P : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Denotamos:

$$A_I = \{f : I \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es derivable en } I\}$$

$$A_P = \left\{ g : I \rightarrow \mathbb{R} \mid \text{para cada } c \in I \text{ existe } \lim_{x \rightarrow c} \frac{g(x) - g(c)}{x - c} = p(c) \right\}$$

¿Qué condiciones debe cumplir la función P para que $A_I = A_P$?

a) La función P debe ser continua en I .

b) La función P debe ser diferenciable en I .

c) La función P debe coincidir con la derivada usual: $P(x) = f'(x)$ para alguna $f \in A_I$.

d) La función P debe ser el límite de cocientes diferenciales, es decir, debe ser continua y coincidir con la derivada de alguna función $g \in A_P$.