INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

ESCUELA SUPERIOR DE FíSICA Y MATEMÁTICAS

26° CONCURSO NACIONAL DE MATEMÁTICAS PIERRE FERMAT

GUÍA 2024

TODOS LOS NIVELES

Concurso Nacional Pierre Fermat 2024

Escuela Superior de Física y Matemáticas del I.P.N.

PRESENTACIÓN

Antecedentes

El concurso de matemáticas Pierre Fermat, nace a instancias de un grupo de estudiantes de la ESFM, que habiendo participado en olimpiadas de matemáticas, pensaron en un evento semejante para la ESFM. Estos estudiantes Ernesto Lupercio Lara. José Luis Flores Silva, Luis Cruz Romo, entre otros, piden y logran que las autoridades de la ESFM, organicen el concurso pensado por ellos. De esta manera nace en 1990, el primer Concurso de Matemáticas Pierre Fermat, coordinado y fuertemente apoyado por el Profesor Fabio Dávila Ojeda y por el estudiante Francisco Zaragoza Martínez. Así pues, este concurso, comienza localmente para estudiantes de ESFM y algunos otros de nivel medio superior y secundaria que se logró captar. Además, el concurso fué fuertemente influenciado por las olimpiadas de matemáticas. Este grupo de estudiantes y profesores se disgrega en 1996, dando con ello término a la primera época del concurso. En la segunda época del concurso que da inicio en 2002, se le da el carácter de nacional al abrirse a estudiantes de toda la república y al eliminarse las restricciones en cuanto a edad de los concursantes. Se le desvincula de las olimpiadas, se introducen nuevos temas para evaluar a los concursantes y se eliminan los problemas "tipo olimpiada", obteniendo así un concurso propio de la ESFM. Actualmente el concurso Nacional de Matemáticas Pierre Fermat es parte de la "huella académica" de la ESFM y es un instrumento útil para evaluar el estado que guarda la educación matemática en México.

Objetivo

La ESFM, preocupada por la poca preparación matemática básica de la que hacen gala algunos alumnos de nuevo ingreso al IPN, se ha dado a la tarea de organizar el concurso Pierre Fermat, persiguiendo entre otros objetivos, el despertar el amor por las matemáticas en los estudiantes, captar alumnos y tener un patrón de referencia de la educación matemática en México.

Población

El concurso Pierre Fermat contempla tres categorías: Nivel Secundaria, Nivel Medio Superior y Nivel Superior.

Concurso Nacional Pierre Fermat 2024

Escuela Superior de Física y Matemáticas del I.P.N.

REGISTRO

El concurso consta de tres niveles

Secundaria, Medio Superior y Superior.

Requisitos

1. Estar inscrito en cualquier escuela pública o privada del pais.
2. El nivel inscrito en su escuela debe coincidir con el nivel en el que participarán en el concurso, por lo que se debe presentar un comprobante de estudios vigente (credencial o constancia) al momento de presentarse a la fase eliminatoria. En caso de estar en etapa de transición de un nivel a otro (secundaria - medio superior, medio superior - superior) presentará examen en el nivel que estaban en el momento de registrarse.

Etapas del concurso

1. **Registro:** 6 de mayo al 1 de julio de 2024 en https://www.esfm.ipn.mx/pierre-fermat.html
2. **Eliminatoria:** 6 de julio de 2024, a las 10:00 a.m. en todas las sedes. Consiste de un examen de 25 a 30 preguntas de opción multiple con un tiempo límite de 4 horas. Aquellos que obtengan mejor calificación pasarán a la siguiente etapa.
3. **Final:** 14 de septiembre de 2024 a las 10:00 a.m. en la ESFM - IPN. Consiste de un examen de cinco preguntas abiertas con un tiempo límite de 4 horas.
4. **Premiación:** 22 de noviembre de 2024 a las 12:00 p.m. en el Auditorio "Víctor Flores Maldonado"de la ESFM-IPN.

Todos los concursantes recibirán diploma de participación después de la etapa eliminatoria. Los ganadores obtendrán diploma y un presente de nuestros patrocinadores. También se otorgarán menciones honoríficas a aquellos cuyas soluciones hayan sido destacadas.

La inscripción es gratuita, sólo se realizará de manera electrónica y no habrá prórroga al periodo definido.

Concurso Nacional Pierre Fermat 2024

Escuela Superior de Física y Matemáticas del I.P.N.

Guía para Nivel Secundaria

Problemas

1. ¿Calcular la factorización en números primos de 2024 y 2020

   a) $2^3(11)(23)$ y $2^2(5)(101)$.

   b) $2^4(13)(17)$ y $2^3(103)$.

   c) $2^3(13)(21)$ y $2^2(5)(105)$.

   d) $2^4(11)(29)$ y $2^3(3)(97)$.

2. ¿Cuál de los siguientes enunciados es falso?

   a) La suma de dos números pares es par.

   b) La suma de dos números racionales es racional.

   c) La suma de dos números impares es par.

   d) La suma de dos números irracionales es irracional.

3. Hallar el valor de la siguiente expresión

$$\sum_{k=1}^{30} k\left(\frac{1}{3}\left(\left(\sum_{k=1}^{30} 2\right)+1\right)\right).$$

   a) 155.

   b) 9455.

   c) 56730.

   d) 465.

4. ¿Cuál de los siguientes polinomios es irreducible en los números reales?

   a) $x^4 + 3x^3 - x^2$.

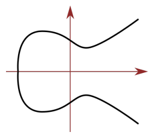
   b) $2x^2 + 9x + 4$.

   c) $x^3 + 3x^2 + x - 1$.

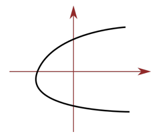
   d) $x^4 + 2x^2 + 1$.

5. ¿Qué gráfica representa a la ecuación?

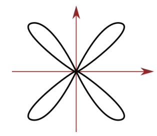
$$y^2 = x^3 - x + 1$$



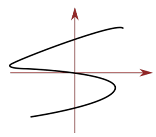
(a)



(b)



(c)



(d)

6. Determinar cuántas cifras contiene la periodicidad (si la tiene) el número 20.24 en base binaria.

   a) 10.

   b) No es periódico.

   c) 20.

   d) 30.

7. ¿Cuál de las identidades es equivalente a

$$\cos^2(\phi) + \sin^2(\phi) = 1?$$

   a) $\cos^4\left(\frac{\phi}{2}\right) + \sin^4\left(\frac{\phi}{2}\right) = 1 + \sin(\phi)$.

   b) $1 - \cot^2(\phi) = \csc^2(\phi)$.

   c) $\sec^2(\pi - \phi)\left(\cos^4\left(\frac{\phi}{2}\right) + \sin^4\left(\frac{\phi}{2}\right)\right) = 1 + \frac{1}{2}\sin^2(\phi)$.

   d) $\sec^2(\phi) + \csc^2(\phi) = \sec(\phi)\csc(\phi)$.

8. ¿Cuál es la factorización de la expresión algebraica $2a^3 + 3a^2b - 3ab^2 - 2b^3$?

   a) $(a + b)(2a - b)(a + 2b)$

   b) $(a - b)(2a + b)(a + 2b)$

   c) $(a - b)(2a + b)(a - 2b)$

   d) $(a + b)(2a - b)(a - 2b)$

9. ¿Es posible que la expresión algebraica $x^2 + 3x + 3$ tenga una factorización de la forma $(x - a)(x - b)$ donde a y b son números racionales?

a) Si

b) No

c) No sé

d) La pregunta está mal planteada

10. Supónga que a es un entero positivo tal que a y su entero positivo consecutivo son las longitudes de los catetos de un triángulo rectángulo, y sea $f(x)$ un polinomio cuadrático tal que $f(a)$ es el cuadrado de un entero positivo. ¿Cuál debe de ser el polinomio $f(x)$?

    a) $2x^2 - 2x - 1$

    b) $2x^2 - 2x + 1$

    c) $2x^2 + 2x - 1$

    d) $2x^2 + 2x + 1$

11. Martha, Maria, José y Juan son cuatro estudiantes de una secundaria que serán sentados en una fila de cuatro sillas, de tal manera que Martha no debe de aparecer sentada entre José y Juan. ¿De cuántas maneras posibles pueden ser sentados en dicha fila Martha, Maria, José y Juan?

    a) 12

    b) 18

    c) 20

    d) 24

12. El valor $\cos(60°)+\text{sen}(60°)$ es raíz de una ecuación cuadrática. ¿Cuál es esta ecuación cuadrática?

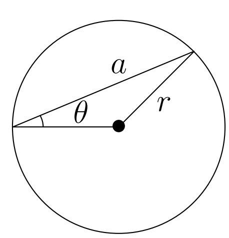
    a) $2x^2 - 2x - 1 = 0$

    b) $2x^2 - 2x + 1 = 0$

    c) $2x^2 + 2x - 1 = 0$

    d) $2x^2 + 2x + 1 = 0$

13. Considere la figura siguiente



¿Cuál es la identidad que está relacionada con el triángulo interior del círculo?

a) $a^2 = b^2(1 + \cos(2\theta))$
b) $a^2 = 2b^2(1 - \cos(2\theta))$
c) $a^2 = 2b^2(1 + \cos(2\theta))$
d) $a^2 = b^2(1 - \cos(2\theta))$

14. ¿Cuál es el valor positivo de x que hace que $e^{\frac{(x^2-3)}{2}}$ sea igual a 1/2?

a) $\sqrt{3\ln(2) + 2}$
b) $\sqrt{2\ln(\frac{1}{3}) + 2}$
c) $\sqrt{2\ln(\frac{1}{2}) + 2}$
d) $\sqrt{\ln(\frac{2}{3}) + 2}$

15. ¿Cuánto vale la suma de x y y si son la solución al siguiente sistema de ecuaciones?

$$3x - 7y = 1$$
$$2x + 5y = -2$$

a) $\frac{72}{29}$
b) $-\frac{1}{29}$
c) $\frac{1}{29}$
d) $-\frac{17}{29}$

16. De un pedazo cuadrado de cartón se ha recortado un disco, como se muestra en la Figura 2. El área del cartón sobrante es de $(16 - 4\pi)$ cm^2. ¿Cuál es el radio del disco?

a) 2
b) 4π
c) 4
d) 2π

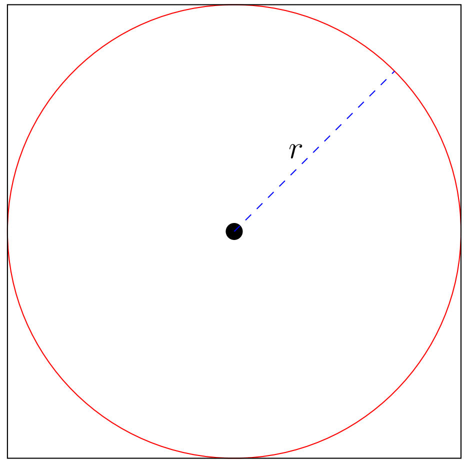


Figura 2: Figura para el Problema 16

17. Elegimos un número entero. Lo duplicamos, duplicamos el resultado otra vez y hacemos lo mismo una tercera y cuarta vez. ¿Cuál de los siguientes números **no** puede ser el resultado final?

   a) 80
   b) 1200
   c) 48
   d) 84

18. Obtén el conjunto $[(A \cap C) \cap (C \cup B)] \cup (A \cap B)$ si $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $B = \{5, 8, 9, 10, 11, 12\}$ y $C = \{0, 8, 11, 13, 15\}$

   a) $\{0, 11, 12, 13\}$
   b) $\{0, 5, 8, 9\}$
   c) $\{8\}$
   d) $\{8, 11\}$

19. Cuál de los siguientes números divide exactamente a $14^{15} - 1$.

   a) 13
   b) 13^2
   c) 7
   d) 2

20. Cuál es el número que más se aproxima al recíproco de la cantidad de segundos que han transcurrido desde el 1 de enero de 1990 hasta el 1 de mayo de 2023.

a) 1×10^{-10}

b) 1×10^{9}

c) 1×10^{10}

d) 1×10^{-9}

21. ¿Cuánto vale la raíz cúbica de 2299968?

a) 766656

b) 128

c) 633324

d) 132

22. ¿Cuál es la ecuación cuadrática que tiene por raíces los valores $x_1 = 1$ y $x_2 = -2$?

a) $2x^2 - 6x + 4 = 0$

b) $2x^2 - 2x - 4 = 0$

c) $2x^2 + 2x - 4 = 0$

d) $2x^2 + 6x + 4 = 0$

23. Un número decimal se escribe en notación cientifica con k cifras significativas como $D.d_1d_2...d_k \times 10^E$, donde D es un número que está en $\{1, 2, ..., 9\}$ y las cifras significativas se obtienen por truncamiento. Por ejemplo 12.3456 se escribe con tres cifras significativas como 1.234×10^1.

Bajo reglas análogas para la notación en base binaria (base dos) y con el cambio de $\times 10^E$ por $\times 2^E$. Determinar la representación en notación cientifica binaria con siete cifras significativas del número 3.1415.

a) $11,0010011 \times 2^0$

b) $1,1001001 \times 2^1$

c) $0,1001001 \times 2^1$

d) $11,1001001 \times 2^0$

24. Hallar un valor de x, y, z y w si se sabe que $3^x + 3^y + 3^z + 3^w = 2520$

a) $x = 7, y = 5,$
$z = 4, w = 2$

b) $x = 8, y = 4,$
$z = 0, w = 1$

c) $\begin{array}{l} x = 4, y = 4, \\ z = 4, w = 4 \end{array}$

d) $\begin{array}{l} x = 5, y = 1, \\ z = 2, w = 0 \end{array}$

25. Calcular la suma de la serie

$$\frac{1^3}{1} + \frac{1^3 + 2^3}{1 + 3} + \frac{1^3 + 2^3 + 3^3}{1 + 3 + 5} + \cdots$$

hasta el término 16.

a) 446

b) 245

c) 335

d) 725

Concurso Nacional Pierre Fermat 2024

Escuela Superior de Física y Matemáticas del I.P.N.

Guía para Nivel Medio Superior

Problemas

1. Desde una ciudad A parten trenes hacia la ciudad B. Por otro lado, desde B parte un tren hacia A cada hora a la hora exacta. En ambos casos el viaje dura 3 horas 45 minutos. Si uno toma el tren de A a B a las 12 en punto del mediodía, ¿cuántos trenes procedentes de B ve pasar durante el viaje?

   a) 6

   b) 7

   c) 8

   d) 9

2. Dada la expresión $1 + (n^2 + n)(n^2 + 5n + 6) = 181^2$, donde n es un número entero, el valor de $n(n + 3)$ es:

   a) 180

   b) 150

   c) 220

   d) 181

3. Resuelva la siguiente operación con polinomios:

$$\frac{(3x^2 - x + 1)}{(x - 1)}$$

   a) $3x + 2 + \frac{3}{x-1}$

   b) $3x + 2 + \frac{3}{x+1}$

   c) $3x + 2 + \frac{1}{x-1}$

   d) $3x + 2 - \frac{3}{x-1}$

4. Calcule el dominio de la siguiente función:

$$f(x) = \frac{|x|}{\sqrt{4 - x^2}}$$

a) $x \in (-\infty,\ 2)$

b) $x \in (-2,\ \infty)$

c) $x \in (-2,\ 2)$

d) $x \in [-2,\ 2]$

5. Si $a = \sqrt{4 - \sqrt{5 - a}}$, $b = \sqrt{4 + \sqrt{5 - b}}$, $c = \sqrt{4 - \sqrt{5 + c}}$, $d = \sqrt{4 + \sqrt{5 + d}}$, determina el valor del producto $abcd$.

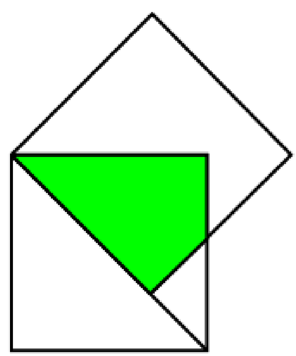
a) 121

b) 11

c) $\sqrt{11}$

d) 12

6. En la figura se muestran dos cuadrados de lado 1. ¿Cuál es el área de la región sombreada?



a) $\sqrt{2} - 1$

b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$

d) $\sqrt{2} + 1$

7. Un examen está formado por 10 preguntas que deben responderse como falso o verdadero. La clave (es decir, la lista de respuestas correctas) del examen está diseñada de tal manera que si un estudiante responde al azar 5 falsos y 5 verdaderos seguro obtiene al menos 4 respuestas correctas. ¿Cuántas claves diferentes cumplen con esta afirmación?

a) 2

b) 10

c) 22

d) 5^5

8. El resultado de el siguiente límite

$$\lim_{t\to 0} \frac{\arctan(2t)}{\sin(3t)},$$

es

a) 2/3

b) 1

c) $\frac{\pi}{2}$

d) $\frac{\pi}{3}$

9. Calcule la derivada de la siguiente función:

$$f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$$

a) $\dfrac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}$

b) $\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}$

c) $\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}$

d) $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}$

10. Obtén la integral indefinida de la siguiente función:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{81+16x^2}}$$

a) $-\frac{1}{4}\ln\left|\dfrac{\sqrt{81+16x^2}-4x}{9}\right| + C$

b) $-\ln\left|\dfrac{\sqrt{81+16x^2}-4x}{9}\right| + C$

c) $\ln\left|\dfrac{\sqrt{81+16x^2}-4x}{9}\right| + C$

d) $\frac{1}{4}\ln\left|\dfrac{\sqrt{81+16x^2}-4x}{9}\right| + C$

11. Obtén las coordenadas del punto máximo y del punto mínimo de la función

$$y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x$$

a) $(-1, -\frac{5}{3}),\ (3, 9)$

b) $(1, \frac{5}{3}),\ (-3, -9)$

c) $(-1, \frac{5}{3}),\ (3, 9)$

d) $(-1, \frac{5}{3}),\ (3, -9)$

12. ¿Cuál es límite, cuando $x \longrightarrow a$, de la función

$$f(x) = \frac{(a^2 - x^2)^{1/2} + (a-x)^{3/2}}{(a^3 - x^3)^{1/2} + (a-x)^{1/2}}?$$

a) $\dfrac{\sqrt{a}}{a\sqrt{3}+1}$

b) $\dfrac{\sqrt{2a}}{a\sqrt{3}+1}$

c) $\dfrac{\sqrt{2}a}{a\sqrt{3}+1}$

d) $\dfrac{2a}{a\sqrt{3}+1}$

13. Considere las ecuaciones $f(x) = x^3 + 3px^2 + 3qx + r$ y $g(x) = x^2 + 2px + q$.

i) Si $f(x)$ y $g(x)$ tienen un factor en común, ¿cuál de las siguientes expresiones es cierta?

a) $4(p^2 - q)(q^2 - pr) - (qr - q)^2 = 0$

b) $4(p^2 - q)(q^2 - pr) - (pr - q)^2 = 0$

c) $4(p^2 - q)(q^2 - p) - (pq - r)^2 = 0$

d) $4(p^2 - q)(q^2 - pr) - (pq - r)^2 = 0$

ii) Si $f(x)$ y $g(x)$ tienen dos factores en comunes, ¿cuál de las siguientes expresiones es cierta?

a) $p^2 - q = 0$ y $r - qp = 0$

b) $p^2 - q = 0$ y $p^2 - qr = 0$

c) $p^2 - q = 0$ y $q^2 - pr = 0$

d) $p^2 - q = 0$ y $r^2 - qp = 0$

14. Hallar las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones

$$a^{2x} \cdot b^{3y} = m^5$$
$$a^{3x} \cdot b^{2y} = m^{10}$$

a) $x = \dfrac{2\log m}{\log a}$; $y = -\dfrac{\log m}{\log b}$

b) $x = \dfrac{2\log m}{\log a}$; $y = \dfrac{\log m}{\log b}$

c) $x = \dfrac{4\log m}{\log a}$; $y = -\dfrac{\log m}{\log b}$

d) $x = \dfrac{4\log m}{\log a}$; $y = \dfrac{\log m}{\log b}$

15. Sean α y β raíces no nulas de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$. ¿Cuál es la ecuación cuyas raíces son $\dfrac{\alpha}{\beta}$ y $\dfrac{\beta}{\alpha}$?

a) $acx^2 - (b^2 - 2ac)x + ac = 0$

b) $acx^2 - (b^2 + 2ac)x + ac = 0$

c) $acx^2 + (b^2 - 2ac)x + ac = 0$

d) $acx^2 + (b^2 + 2ac)x + ac = 0$

16. Calcular la raíz cuadrada de

$$1 + \frac{1}{\sqrt{1-a^2}}$$

a) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{1-a^2}}\left(\sqrt{\dfrac{1+a}{2}} - \sqrt{\dfrac{1-a}{2}}\right)$

b) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{1-a^2}}\left(\sqrt{\dfrac{1+a}{2}} + \sqrt{\dfrac{1-a}{2}}\right)$

c) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{1-a^2}}\left(\sqrt{\dfrac{1-a}{2}} - \sqrt{\dfrac{1+a}{2}}\right)$

d) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{1-a}}\left(\sqrt{\dfrac{1+a}{2}} + \sqrt{\dfrac{1-a}{2}}\right)$

17. En un triángulo rectángulo ABC, $BC = 3, AC = 4$. ¿Cuál es la longitud de la menor trisectriz desde C hasta la hipotenusa?

a) $\dfrac{32\sqrt{3} - 24}{13}$

b) $\dfrac{12\sqrt{3} - 9}{13}$

c) $6\sqrt{3} - 8$

d) $\dfrac{5\sqrt{10}}{6}$

18. Una elipse tiene su centro en el origen, su eje mayor $2a$ es igual a 8 y está sobre la recta $y = -x$, mientras que su eje menor está sobre la recta $y = x$. Además, desde cualquiera de sus focos el semieje menor se ve bajo un ángulo de 15°. ¿Cuál es la ecuación de la elipse?

a) $(2-\sqrt{3})(x-y)^2 + 4(x+y)^2 = 16(2-\sqrt{3})$

b) $(2-\sqrt{3})(x-y)^2 + 4(x+y)^2 = 16(2+\sqrt{3})$

c) $(2-\sqrt{3})(x-y)^2 + 4(x+y)^2 = 32(2-\sqrt{3})$

d) $(2-\sqrt{3})(x-y)^2 + 4(x+y)^2 = 32(2+\sqrt{3})$

19. En un triángulo rectángulo ABC, la hipotenusa $AB = 5$ y el cateto $AC = 3$. La bisectriz del ángulo A corta al lado opuesto en A_1. Se construye un segundo triángulo rectángulo PQR con hipotenusa $PQ = A_1B$ y un cateto $PR = A_1C$. Si la bisectriz del ángulo P corta al lado opuesto en P_1, ¿cuál es la longitud de PP_1?

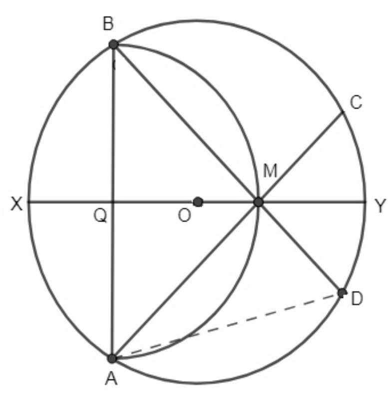
a) $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$

b) $\dfrac{3\sqrt{5}}{4}$

c) $\dfrac{3\sqrt{6}}{4}$

d) $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

20. En un círculo con centro en O, Q es el punto medio del radio $\overline{OX}$. La mediatriz de $\overline{OX}$ corta al círculo en A y B, y el semicírculo cuyo diámetro es $\overline{AB}$ corta a XY en M. Se trazan las rectas AM y BM y se prolongan hasta que corten al círculo, respectivamente, en C y D. Si r denota el radio del círculo, ¿cuál es la longitud de AD?



a) $r\sqrt{2}$

b) $\dfrac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{r}$

c) $\dfrac{r\sqrt{3}}{2}$

d) $r\sqrt{3}$

21. Evalúe el siguiente producto.

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2024^2}\right)$$

a) $\dfrac{2025}{2048}$

b) $\dfrac{2024}{2048}$

c) $\dfrac{1}{48}$

d) $\dfrac{1}{2024}$

22. En el siguiente arreglo se han colocado los números impares, de manera que el renglón j-ésimo hay j números impares consecutivos,

$$\begin{array}{cccc} 1 & & & \\ 3 & 5 & & \\ 7 & 9 & 11 & \\ 13 & 15 & 17 & 19 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$$

i) ¿Qué número es el primero (a la izquierda) en el renglón 100?

a) 9901

b) 999

c) 9190

d) 100

ii) ¿Cuál es la suma de los números del renglón 100?

a) 10^9

b) 10^2

c) 99991

d) 10^6

23. Encuentre la cantidad de pares ordenados de números reales (a, b) tales que $(a+ib)^{2024} = a-ib$

a) 2026 parejas

b) 2025 parejas

c) 2024 parejas

d) Ninguna de las anteriores

24. Sea $f(x) = x^2 + ax + b$ un polinomio con coeficientes enteros. Si f es un factor común de los polinomios $g(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 3x + 1$ y $h(x) = 3x^4 - 9x^3 + 2x^2 + 3x - 1$, encuentre $f(x)$.

    a) $f(x) = x^2 + 3x + 1$

    b) $f(x) = x^2 - 3x - 1$

    c) $f(x) = x^2 - 3x + 1$

    d) $f(x) = x^2 + 3x - 1$

25. Sea f_n la sucesión de Fibonacci ($f_1 = 1, f_2 = 1, f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$). Calcule la suma de la siguiente serie:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{f_n}{f_{n-1} \cdot f_{n+1}}$$

    a) 1

    b) 2

    c) 3

    d) 4

Concurso Nacional Pierre Fermat 2024

Escuela Superior de Física y Matemáticas del I.P.N.

Guía para Nivel Superior

Problemas

1. La siguiente correspondencia entre dos triángulos es una congruencia.

   a) LLA

   b) LAA

   c) AAA

   d) Ninguno de los anteriores

2. En la geometría elemental encontramos los siguientes postulados de congruencia de triángulos LAL, ALA, LLL. ¿ Es posible demostrar con uno de estos postulados los otros dos? ¿Cuál es este postulado? Elija la opción que considere correcta

   a) LAL

   b) ALA

   c) LLL

   d) Ninguno

3. El resultado del siguiente límite

$$\lim_{x\to\infty}\int_0^{\frac{x^2}{2}} \frac{t^2}{x^2(1+t^2)}\,dt$$

   es

   a) $\frac{1}{4}$

   b) $\frac{1}{2}$

   c) 1

   d) Ninguno de los anteriores

4. Sean z_1, z_2 números complejos, ω una raíz n-ésima de la unidad, entonces

$$\sum_{k=1}^{n-1} |z_1 + \omega^k z_2|^2$$

   es igual a

a) $n^2|z_1+z_2|^2$

b) $(\frac{z_1}{n}+\frac{z_2}{n})^2$

c) $n(|z_1|^2+|z_2|^2)$

d) $n^2(|z_1|^2+|z_2|^2)$

5. Considere la ecuación

$$\tan\alpha_0 z^n+\tan\alpha_1 z^{n-1}+\cdots+\tan\alpha_{n-1}z+\tan\alpha_n=3$$

con $\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in(0,\frac{\pi}{4})$. Podemos decir que la distancia de las raíces de dicha ecuación al origen

a) es mayor que $2/3$

b) es menor que $2/3$

c) es mayor que $|\cos\alpha_1|+|\cos\alpha_2|+\cdots+|\cos\alpha_n|$

d) es menor que $|\cos\alpha_1|+|\cos\alpha_2|+\cdots+|\cos\alpha_n|$

6. Sea $f_0:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función continua. Definida inductivamente

$$f_n(x)=\int_0^x f_{n-1}(t)dt,\quad \forall x\in[a,b]\quad \text{y}\quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

a) $\{f_n\}$ diverge en $[a,b]$

b) $\{f_n\}$ converge a 1 en $[a,b]$

c) $\{f_n\}$ converge a cero uniformemente en $[a,b]$

d) Ninguna de las anteriores

7. Sean A una matriz de orden 2×1, B una matriz de orden 1×2. ¿Cuál de los siguientes enunciados siempre se cumple para la matriz AB.

a) AB no es invertible

b) AB es simétrica

c) AB es diagonalizable

d) AB es antisimétrica

8. El valor de

$$S=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2^n}+e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}\right)\left(\frac{1+\sqrt{n}}{n}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}\right)$$

es:

a) 0

b) ∞

c) 1

d) Ninguna de las anteriores.

9. Sea $0 \leq a \leq 1$. Sin realizar los cálculos, hallar el valor de

$$V = \int_0^1 \int_0^1 \left(\int_0^a \sqrt{1-x^2}dx + \int_0^{\sqrt{1-a^2}} \left(\sqrt{1-y^2} - a \right) dy \right) dxdy$$

a) 1

b) $\frac{\pi}{4}$

c) $\pi \cos a$

d) Ninguna de las anteriores.

10. Sea b entero impar. Si $(3x^6 + bx^5 + 8x^4 + bx^3 + 5x^2, x^4 - x^2) \neq 1$ entonces $p(x) = 3x^6 + bx^5 + 8x^4 + bx^3 + 5x^2$ satisface:

a) Tiene cuatro soluciones irracionales.

b) Todas las soluciones son números racionales.

c) No tiene soluciones racionales positivas.

d) Ninguna de las anteriores.

11. Si $p(x)$ es un polinomio con coeficientes reales tal que se cumple $(2x+1)\,p(2x) = (64x+2)\,p(x+1)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ entonces $p(x)$:

a) Tiene al menos una raíz real.

b) $p(x)$ tiene grado 6.

c) Todas las raíces de $p(x)$ son complejas.

d) Ninguna de las anteriores.

12. Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función continua y, A denso (en $\mathbb{R}^2$). Eliga la opcion verdadera:

a) Si $f_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ son funciones tales que $f_i(x) = f(x)$ $(i = 1, 2, \ldots)$ para toda $x \in A$ y, cada f_i es diferenciable (en $\mathbb{R}^2$) entonces, $f_i = f_j$ para todo $i, j \in \mathbb{N}$.

b) $f(A)$ es denso (en $\mathbb{R}$).

c) Si A es conexo y $f(A)$ es acotado entonces $f(A) \setminus FrA$ es compacto.

d) Ninguna de las anteriores.

13. Sea A una matríz 3×5 de entradas reales. Si $B = A^t A$ entonces:

  a) $p(\lambda) = \det(B - \lambda I)$ tiene 5 raíces no negativos.

  b) $\det B = \det A^t A = \det A^t \det A = (\det A)^2$.

  c) Sea $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ tal que la matríz asociada a T en las bases cánonicas de $\mathbb{R}^5$ es B. Entonces el producto de los valores propios de T es negativo.

  d) Ninguna de las anteriores.

14. Sean $A = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1 \,\&z \neq -1\} \subset \mathbb{C}$ y $f : A \to \mathbb{R}$ la función definida por: $f(z) = \frac{\operatorname{Im}(z)}{1+\operatorname{Re}(z)}$, $\forall z \in A$. Determine cuál de los siguientes enunciados es verdadero.

  a) f es una función invertible y $Im((f^{-1})') = \frac{1-2t^2}{(1+t^2)^2}$

  b) $|f(z)| \leq 12, \quad \forall z \in A$

  c) No existe $z \in A$ tal que $f(z) = f(\overline{z})$

  d) f no es inyectiva y f es derivable en cada punto de A.

15. Sea x un número real fijo, considere la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \sin^3\left(\frac{x}{3^n}\right)$. Determine cuál de los siguientes enunciados es verdadero:

  a) La serie es convergente y su suma es $\frac{3}{4}(x - \sin(x))$

  b) La serie es divergente.

  c) La serie converge a $x \sin(x)$

  d) La serie es absolutamente convergente y converge a $\frac{1}{3}\sin(x)$

16. Sean $x,\ z \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ y $\|\Box\|$ una norma definida sobre $\mathbb{R}^n$, determine cuál de los siguientes enunciados es verdadero:

  a) $\left\| \dfrac{x}{\|x\|} - \dfrac{z}{\|z\|} \right\| \leq \dfrac{2\|x-z\|}{\|x\|}$

  b) $\left\| \dfrac{x}{\|x\|} - \dfrac{z}{\|z\|} \right\| \leq \|x-z\|$

  c) $\|x-z\| \leq \|x+z\|$

  d) $\left\| \dfrac{x}{\|x\|} - \dfrac{z}{\|z\|} \right\| \leq \dfrac{\|x-z\|}{\|x\|}$

17. El volumen del Toro dado por la siguiente ecuación

$$(R - \sqrt{x^2+y^2})^2 + z^2 = r^2$$

es

a) $\frac{1}{4}\pi R^2 r$

b) $\frac{1}{3}\pi R r^2$

c) $2\pi^2 R r^2$

d) $4\pi R^2 r^2$

18. El resultado del siguiente producto infinito

$$\frac{2}{\sqrt{2}}\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}\cdots$$

es

a) $\frac{\pi}{4}$

b) $\frac{\pi}{3}$

c) $\frac{\pi}{2}$

d) Ninguno de las anteriores

19. La integral

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+a^2}\ dx$$

es igual a

a) $\frac{\pi}{2a}\ln a$

b) $\frac{\pi}{2a}$

c) $\frac{\pi}{2}\ln a$

d) Ninguno de las anteriores

20. La función Gamma se define como

$$\Gamma(\alpha) := \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\ dt, \qquad \forall\ x \in (0,\infty).$$

Si $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\Gamma(-\frac{1}{2})$ es

a) $2\sqrt{\pi}$

b) $-2\sqrt{\pi}$

c) $\sqrt{\pi}$

d) Ninguno de las anteriores

21. Sea $f \in L_1(a,b)$. Definimos la integral fraccionaria de Riemann - Louville de orden α como

$$I^\alpha f(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\, dt, \qquad (x > a),$$

donde $\Gamma(\alpha)$ es la función Gamma. Esta integral la podemos interpretar como la derivada de orden $-\alpha$ de $f(x)$ y la denotamos $D^{-\alpha}$. Esta idea nos permite calcular derivadas de orden fraccionario. La media derivada de $f(x)$ la obtenemos de la siguiente forma

$$D^{1/2} f(x) = D^1 D^{-1/2} f(x).$$

Si $f(x) = 1$, la media derivada de $f(x)$ es

a) $\frac{2}{\sqrt{\pi}} x^{1/2}$
b) $\frac{1}{\sqrt{\pi}} x$
c) $\sqrt{\pi} x^{1/3}$
d) Ninguno de las anteriores

22. Sea G un grupo. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

a) Si $a, b \in G$ son de ordenes finitos, entonces ab es de orden finito.
b) Si $a, b \in G$ son de ordenes infinitos, entonces ab es de orden infinito.
c) Si G tiene un número finito de subgrupos, entonces G es finito.
d) Ninguna de las anteriores

23. Sea G un grupo. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

a) Sean H, K subgrupos de G. Si H es un subgrupo normal en K y K es un subgrupo normal en G, entonces H es un subgrupo normal en G.
b) Sean H, K subgrupos normales de un grupo G. Si $HK = G$ entonces $hk = kh$ para todo $h \in H$ y $k \in K$
c) Sea G un grupo. Si H es un subgrupo normal abeliano en G y G/H es abeliano, entonces G es abeliano.
d) Ninguna de las anteriores

24. Sea G un grupo abeliano que tiene una cantidad finita de elementos de orden 2, ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

a) G tiene una cantidad infinita de elementos de orden 4
b) G tiene una cantidad finita de elementos de orden 4
c) Si $a \in G$, entonces la ecuación $x^2 = 4$ tiene seis soluciones

d) Ninguno de las anteriores

25. El grado o exactitud de una fórmula de cuadratura es el entero positivo más grande n, tal que la fórmula sea exacta para x^k, para cada $k = 0, 1, 2, \ldots, n$. Los valores de las constantes c_0, c_1 y x_1 tal que la fórmula de cuadratura

$$\int_0^1 f(x)\ dx = c_0 f(0) + c_1 f(x_1)$$

tenga el grado de precisión más alto posible son

a) $c_0 = 1$, $c_1 = 2$ y $x_1 = 0$

b) $c_0 = 3$, $c_1 = 2$ y $x_1 = 1$

c) $c_0 = -1$, $c_1 = 2$ y $x_1 = 2$

d) Ninguno de las anteriores

COMITÉ ORGANIZADOR

Presidente

Miguel Neri Rosas

Coordinación general

Carlos Alejandro Moreno Muñoz

Erick Lee Guzmán

Comité del nivel superior

Andrés Sabino Díaz Castro

José Oscar González Cervantes

Francisco Ramírez Reyes

Salvador Quintín Flores García

Comité del nivel medio superior

Abelardo Santaella Quíntas

Santiago Marcos Zepeda Martínez

Luis Enrique Tapia Balderas

Comité del nivel secundaria

Pablo Lam Estrada

Gamaliel Yafte Téllez Sánchez

Oliver Fernando Cuate González

Patrocinadores

Reason Play, S.A.

Universidad Anáhuac

Kepler Institute

Liber IK