INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

ESCUELA SUPERIOR DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

XXII

GUÍA PARA TODOS LOS NIVELES

2018

El concurso comprenderá tres niveles: Secundaria, Medio Superior y Superior.

Requisitos:
Podrán concursar todos los alumnos inscritos en cualquier escuela pública o privada del país, para ello deberán:

1) Inscribirse al nivel escolar que estarán cursando a la fecha de la eliminatoria;
2) Mostrar un comprobante de estudios vigente (credencial o constancia) al momento de presentarse a la eliminatoria.

El Concurso "Pierre Fermat": Constará de dos etapas:

Eliminatoria: 02 de Junio de 2018 a las 10:00 hrs. Consta de un examen de 25 o 30 preguntas de opción múltiple, con 3:00 hrs. para su solución y se aplica en todas las sedes participantes.

Los que obtengan mejor calificación pasarán a la segunda etapa y final.

Final: 01 de septiembre de 2018 a las 10:00 hrs. Consiste de un examen de 5 preguntas de respuesta abierta con 4:00 hrs. para resolverlo y tendrá lugar únicamente en la ESFM-IPN.

Los resultados se publicarán en la página del concurso a partir del 08 de octubre de 2018.

Premiación: Se realizará el 16 de noviembre de 2018 a las 12:00 hrs. en el Auditorio "Víctor Flores Maldonado" de la ESFM-IPN.

- Todos los participantes recibirán diploma de participación.
- Los ganadores obtendrán diploma, medalla, libros y un premio en efectivo.
- Los premios se entregarán únicamente durante la Ceremonia de Premiación.

Inscripciones: Registrase del 02 de abril al 26 de mayo de 2018, a través de la página
http://www.esfm.ipn.mx/Paginas/pierre-fermat.aspx.

La inscripción es gratuita, sólo es posible llevarla a cabo en forma electrónica y no habrá prórroga al periodo definido.

CONCURSO NACIONAL DE MATEMATICAS "PIERRE FERMAT"

Una de las tareas de la Escuela Superior de Física y Matemáticas desde su fundación en 1961, es formar profesionales en matemáticas a nivel licenciatura y posgrado, capaz de integrarse al término de sus estudios en las áreas de Investigación, Desarrollo Tecnológico y Docencia.

Para ello es importante desarrollar actividades con los jóvenes que realizan estudios en el Nivel Medio, Medio Superior o Superior · conducentes a promocionar y estimular el gusto por las matemáticas, para que surjan de ahí en forma natural nuestros futuros estudiantes de ciencias.

Congruente con lo anterior la Escuela Superior de Física y Matemáticas, a partir de 1990 se ha dado a la tarea de organizar el Concurso Nacional de Matemáticas "PlERRE FERMAT".

Esperamos que este XXI Concurso despierte efectivamente el entusiasmo por las matemáticas en muchos jóvenes.

Biografía de Pierre de Fermat

(Beaumont, Francia, 1601 - Castres, id., 1665) Matemático francés. Continuador de la obra de Diofanto en el campo de los números enteros y cofundador del estudio matemático de la probabilidad, junto con Pascal, y de la geometría analítica, junto con Descartes, Pierre de Fermat mantuvo correspondencia con los grandes científicos de su época y gozó ya en vida de gran estima e inmensa reputación, si bien su natural modestia y su modo de trabajar, en exceso diletante, perjudicó la divulgación de sus aportaciones.

La existencia de este ilustre matemático fue ciertamente sencilla y prosaica, y se conoce poco de sus primeros años. Hijo de Dominique Fermat, burgués y segundo cónsul de Beaumont, estudió leyes en Toulouse y quizá en Burdeos para poder aspirar al ejercicio de la magistratura; llegado, en efecto, a consejero del Parlamento de la ciudad de Toulouse, fue progresando allí en su labor lenta y tranquilamente, distinguiéndose por su probidad, su tacto y sus corteses maneras.

Interesado por las matemáticas, consagró a ellas su tiempo de ocio, y hacia 1637 figuraba entre los principales cultivadores europeos de esta ciencia. Hizo amistad con el matemático Carcavi, quien le relacionó con el padre Marin Mersenne, amigo de todos los doctos franceses de la época. El padre Mersenne le puso en contacto con Roberval y con el gran René Descartes (1637).

El trato con el difícil e inquieto genio de Descartes no resultaba fácil para nadie, ni tampoco lo fue para Pierre de Fermat, a pesar de su discreción: ambos discutieron sobre cuestiones científicas (la infracción de la luz y el método de los máximos y mínimos). Fueron necesarias la mediación de Roberval y toda la prudencia de Fermat para mantener por lo menos fríamente correctas las relaciones personales entre los dos sabios. Muy viva, en cambio, fue la amistad entre Fermat y otro gran matemático de la época, Blaise Pascal; ambos se conocieron también gracias a Carcavi.

De talante modesto, Pierre de Fermat sólo llego a dar a la imprenta su monografía *Dissertatio geometrica de linearum curvarum comparatione,* e hizo públicos algunos de sus mayores descubrimientos sólo por medio de breves comunicaciones verbales y epistolares. Ello bastó para darlo a conocer como uno de los grandes matemáticos del momento, pero sus deberes profesionales y su particular forma de trabajar redujeron en gran medida el impacto de su obra, extremadamente prolífica. Tenía por ejemplo la costumbre de anotar, en los márgenes de los libros que leía, sus ideas y sus descubrimientos, desgraciadamente sin sus demostraciones, por falta de espacio. Superando no pocas dificultades, sus escritos fueron publicados póstumamente por su hijo Samuel en 1679, en un volumen titulado *Varia opera matemática D. Petri de Fermat: Senatoris Tolosani*.

Investigaciones matemáticas

Las primeras aportaciones de Pierre de Fermat datan de 1629, cuando abordó la tarea de reconstruir algunas de las demostraciones perdidas del matemático griego Apolonio de Perga relativas a los lugares geométricos; a tal efecto desarrollaría, contemporánea e independientemente de René Descartes, un método algebraico para tratar cuestiones de geometría por medio de un sistema de coordenadas, de capital importancia para la constitución de la geometría analítica. Sirviéndose de los símbolos de François Viète, trató ampliamente la ecuación de la recta, y las de la hipérbola, la parábola y la circunferencia.

Fermat se sitúa asimismo entre los matemáticos que dieron el primer impulso al cálculo infinitesimal, y fue el primero en estudiar las cuestiones de máximo y mínimo (desde 1636) con el método que hoy llamamos de las "derivadas", aprovechando una genial intuición que se presenta por primera vez en la obra del prelado francés Nicolás de Oresme. Diseñó un algoritmo de diferenciación mediante el cual pudo determinar los valores máximos y mínimos de una curva polinómica y trazar las correspondientes tangentes, logros todos ellos que abrieron el camino al desarrollo ulterior del cálculo infinitesimal por Newton y Leibniz.

En el ámbito de la óptica geométrica, tras asumir correctamente que cuando la luz se desplaza en un medio más denso su velocidad disminuye, demostró que el camino de un rayo luminoso entre dos puntos es siempre aquel que menos tiempo le cuesta recorrer; de dicho principio, denominado *principio de Fermat*, se deducen las leyes de la reflexión y la refracción. En 1654, y como resultado de una larga correspondencia, desarrolló con Blaise Pascal los principios de la teoría de la probabilidad.

Otro campo en el que realizó originales aportaciones fue el de la teoría de números, en la que empezó a interesarse tras consultar una edición de la *Aritmética* de Diofanto; precisamente en el margen de una página de dicha edición fue donde anotó el que sería llamado *Último teorema de Fermat*, que tardaría más de tres siglos en demostrarse. Puede decirse que el estudio metódico de las propiedades de los números enteros comienza realmente con Fermat, razón por la que ha sido considerado el verdadero creador de la teoría de los números, a la cual matemáticos antiguos como Pitágoras, Euclides y Diofanto habían dado apenas comienzo.

De su trabajo en dicho campo se derivaron importantes resultados relacionados con las propiedades de los números primos, muchas de las cuales quedaron expresadas en forma de simples proposiciones y teoremas. Desagraciadamente, todo lo que llegado hasta nosotros está contenido casi exclusivamente en los estrechos márgenes de un ejemplar de Diofanto y en algunos fragmentos de su correspondencia. Fermat desarrolló también un ingenioso método de demostración que denominó «del descenso infinito».

El *Último teorema de Fermat*

A pesar de tantas y tan valiosas aportaciones, el nombre del insigne matemático francés se halla con frecuencia asociado a uno de los más fascinantes enigmas de la historia de las matemáticas. Cuando preparaba la edición de las obras completas de su padre, Samuel de Fermat encontró una singular anotación en una de las páginas de la *Aritmética* de Diofanto.

En ella, Fermat afirmaba que la ecuación $x^n+y^n=z^n$ no tiene solución entera positiva si el valor del exponente n es superior a 2. Dicho de otro modo: la suma de dos cuadrados puede equivaler a un tercer cuadrado, como ocurre en la igualdad $3^2+4^2=5^2$, pero es imposible hallar una igualdad semejante entre números enteros positivos elevados al cubo, a la cuarta potencia, a la quinta potencia, etc.

En la misma nota, Fermat decía haber hallado una demostración maravillosa de este hecho, pero demasiado larga para ser consignada en el margen de un libro. Durante los tres siglos que siguieron a la publicación se sucedieron sin descanso los intentos de demostrar este teorema de Fermat, tan difícil de probar que en ciertos momentos pasó a llamarse hipótesis de Fermat. Los nombres de Leonhard Euler, Sophie Germain, Peter Gustav Lejeune Dirichlet, Gabriel Lamé, Augustin-Louis Cauchy o Ernst Eduard Kummer dan una idea del número de grandes matemáticos que no pudieron resistir la tentación de probar suerte.

En 1908, la impaciencia por encontrar solución a un misterio que cumplía ya 250 años llevó a Paul Wolfskehl (un industrial alemán que se salvó del suicidio merced al interés despertado en él por un artículo de Kummer acerca del teorema de Fermat) a dejar en su testamento un premio de cien mil marcos para quien supiera hallarle una demostración antes de cien años. Se dice que sólo durante los cuatro años siguientes a su fallecimiento se publicaron más de mil pruebas falsas.

Los esfuerzos por demostrar el teorema fructificaron en aportaciones interesantísimas para la evolución del álgebra abstracta, como las del propio Kummer y su teoría de los números ideales. El último capítulo de la historia empezó a escribirse en 1955, fecha en que Yutaka Taniyama abordó el estudio de la relación entre las formas modulares y las ecuaciones elípticas. Taniyama no supo encontrar en las matemáticas el consuelo que le proporcionaron a Wolfskehl, y se suicidó en 1957. No obstante, sobre la base de sus trabajos y los de su compañero Goro Shimura, se asentó la conjetura que, tras los trabajos de Weil, sería llamada conjetura de Taniyama-Shimura-Weil.

André Weil, toda una personalidad en la actual teoría de números, dio a conocer la conjetura a la comunidad matemática europea y estadounidense. En 1984, Gerhard Frey estableció la existencia de un vínculo entre dicha conjetura y el Último teorema de Fermat, de manera que la demostración de la primera debe tener como consecuencia inmediata la certeza del segundo, el cual se convierte de este modo en expresión de un hecho relativo a las propiedades fundamentales del espacio.

Nueve años después, la demostración fue finalmente completada por Andrew Wiles, matemático británico y profesor en la Universidad estadounidense de Princeton, quien, tras limar algunos aspectos, la publicó en su forma definitiva en mayo de 1995, en la revista *Annals of Mathematics*. En junio de 1997, en solemne ceremonia, los miembros de la Königliche Gesellschaft der Wissenschaften de Gotinga entregaron a Andrew Wiles el premio creado por Paul Wolfskehl noventa años antes. El misterio que nunca quedará resuelto es si realmente Pierre de Fermat había encontrado una demostración de su teorema, y, en caso afirmativo, si era válida, y en caso de serlo, en que podía consistir, ya que para la demostración de Wiles se emplearon conceptos matemáticos completamente desconocidos en la época de Fermat.

Fuente: Biografias y Vidas. La Enciclopedia Biografica en la Linea
https://www.biografiasyvidas.com/

IMO 2017
RIO DE JANEIRO - BRAZIL
58th International Mathematical Olympiad

Spanish (spa), day 1

Martes, 18 de julio de 2017

Problema 1. Para cada entero $a_0 > 1$, se define la sucesión $a_0, a_1, a_2, \ldots$ tal que para cada $n \geqslant 0$:

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n} & \text{si } \sqrt{a_n} \text{ es entero,} \\ a_n + 3 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Determinar todos los valores de a_0 para los que existe un número A tal que $a_n = A$ para infinitos valores de n.

Problema 2. Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales. Determinar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que, para cualesquiera números reales x e y,

$$f\left(f(x)f(y)\right) + f(x+y) = f(xy).$$

Problema 3. Un conejo invisible y un cazador juegan como sigue en el plano euclídeo. El punto de partida A_0 del conejo, y el punto de partida B_0 del cazador son el mismo. Después de $n-1$ rondas del juego, el conejo se encuentra en el punto A_{n-1} y el cazador se encuentra en el punto B_{n-1}. En la n-ésima ronda del juego, ocurren tres hechos en el siguiente orden:

(i) El conejo se mueve de forma invisible a un punto A_n tal que la distancia entre A_{n-1} y A_n es exactamente 1.

(ii) Un dispositivo de rastreo reporta un punto P_n al cazador. La única información segura que da el dispositivo al cazador es que la distancia entre P_n y A_n es menor o igual que 1.

(iii) El cazador se mueve de forma visible a un punto B_n tal que la distancia entre B_{n-1} y B_n es exactamente 1.

¿Es siempre posible que, cualquiera que sea la manera en que se mueva el conejo y cualesquiera que sean los puntos que reporte el dispositivo de rastreo, el cazador pueda escoger sus movimientos de modo que después de 10^9 rondas el cazador pueda garantizar que la distancia entre él mismo y el conejo sea menor o igual que 100?

Language: Spanish

Tiempo: 4 horas y 30 minutos
Cada problema vale 7 puntos

Miércoles, 19 de julio de 2017

Problema 4. Sean R y S puntos distintos sobre la circunferencia Ω tales que RS no es un diámetro de Ω. Sea ℓ la recta tangente a Ω en R. El punto T es tal que S es el punto medio del segmento RT. El punto J se elige en el menor arco RS de Ω de manera que Γ, la circunferencia circunscrita al triángulo JST, intersecta a ℓ en dos puntos distintos. Sea A el punto común de Γ y ℓ más cercano a R. La recta AJ corta por segunda vez a Ω en K. Demostrar que la recta KT es tangente a Γ.

Problema 5. Sea $N \geqslant 2$ un entero dado. Los $N(N+1)$ jugadores de un grupo de futbolistas, todos de distinta estatura, se colocan en fila. El técnico desea quitar $N(N-1)$ jugadores de esta fila, de modo que la fila resultante formada por los $2N$ jugadores restantes satisfaga las N condiciones siguientes:

(1) Que no quede nadie ubicado entre los dos jugadores más altos.

(2) Que no quede nadie ubicado entre el tercer jugador más alto y el cuarto jugador más alto.

$\vdots$

(N) Que no quede nadie ubicado entre los dos jugadores de menor estatura.

Demostrar que esto siempre es posible.

Problema 6. Un par ordenado (x, y) de enteros es *un punto primitivo* si el máximo común divisor de x e y es 1. Dado un conjunto finito S de puntos primitivos, demostrar que existen un entero positivo n y enteros $a_0, a_1, \ldots, a_n$ tales que, para cada (x, y) de S, se cumple:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \cdots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n = 1.$$

Language: Spanish

Tiempo: 4 horas y 30 minutos
Cada problema vale 7 puntos

31^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas
Concurso Nacional

Santiago, Nuevo León, 2017
Primer día

1. En un tablero de ajedrez de 2017×2017, se han colocado en la primera columna 2017 caballos de ajedrez, uno en cada casilla de la columna. Una tirada consiste en elegir dos caballos distintos y de manera simultnea moverlos como se mueven los caballos de ajedrez. Encuentra todos los posibles valores enteros de k con $1 \leq k \leq 2017$, para los cuales es posible llegar a travs de varias tiradas, a que todos los caballos estn en la columna k, uno en cada casilla.

   Nota. Un caballo se mueve de una casilla X a otra Y, solamente si X y Y son las esquinas opuestas de un rectngulo de 3×2 o de 2×3.

2. Un conjunto de n números enteros positivos distintos es *equilibrado*, si el promedio de cualesquiera k números del conjunto es un número entero, para toda $1 \leq k \leq n$. Encuentra la mayor suma que pueden tener los elementos de un conjunto equilibrado, con todos sus elementos menores o iguales que 2017.

3. Sea ABC un triángulo acutángulo cuyo ortocentro es el punto H. La circunferencia que pasa por los puntos B, H y C vuelve a intersectar a las rectas AB y AC en los puntos D y E, respectivamente. Sean P y Q los puntos de intersección de HB y HC con el segmento DE, respectivamente. Se consideran los puntos X e Y (distintos de A) que están sobre las recta AP y AQ, respectivamente, de manera que los puntos X, A, H y B están sobre un círculo y los puntos Y, A, H y C están sobre un círculo. Muestra que las rectas XY y BC son paralelas.

Olimpiada Mexicana de
Matemáticas

31^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Concurso Nacional

Santiago, Nuevo León, 2017

Segundo día

4. Un subconjunto B de $\{1, 2, ..., 2017\}$, tiene la propiedad T si:

   Cada tres números de B son las longitudes de los lados de un triángulo (de área positiva).

   Determina la mayor cantidad de números que puede tener un conjunto B que tenga la propiedad T.

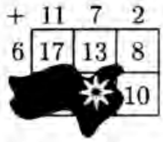
5. Sobre una circunferencia Γ se encuentran los puntos A, B, N, C, D y M colocados en el sentido de las manecillas del reloj de manera que M y N son los puntos medios de los arcos DA y BC (recorridos en el sentido de las manecillas del reloj). Sea P la intersección de los segmentos AC y BD; y sea Q un punto sobre MB de manera que las rectas PQ y MN son perpendiculares. Sobre el segmento MC se considera un punto R de manera que $QB = RC$. Muestra que AC pasa por el punto medio del segmento QR.

6. Sean $n \geq 2$ y $m \geq 2$ enteros positivos. Se tienen m urnas dispuestas en fila. Los jugadores A y B juegan por turnos, comenzando por A, de la siguiente manera. En cada turno, A elige dos urnas y coloca un voto en cada una de ellas. Posteriormente, B elige una urna, y elimina todos los votos de esa. A gana si logra que haya una urna con n votos despus de algn turno de B. Determina para cada n el mnimo valor de m para el cual A puede garantizar ganar, sin importar los movimientos que haga B.

Olimpiada Mexicana de
Matemáticas

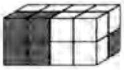
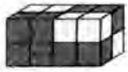
Examen Canguro Matemático Mexicano 2017
Nivel Benjamín

1. La figura muestra una tabla de sumas a la que se le cayó tinta encima. ¿Qué número debe ir en lugar de la estrella?



(a) 10 (b) 11 (c) 12 (d) 13 (e) 15

2. ¿Qué figura puede construirse con 4 piezas iguales a la de la derecha?

(a)  (b)  (c)  (d)  (e) 

3. A una competencia se inscribieron al principio 13 niños y después otros 19. Deben formarse 6 equipos, de tal forma que cada equipo tenga el mismo número de niños. ¿Al menos cuántos niños más deben inscribirse para que se pueda organizar la competencia?

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4 (e) 5

4. En el triángulo isóceles de la figura se dibujó una de sus alturas y se trazaron varias líneas horizontales. La separación entre cada una de las líneas es la misma. ¿Qué fracción del área del triángulo es blanca?

(a) $\frac{3}{4}$ (b) $\frac{1}{3}$ (c) $\frac{2}{3}$ (d) $\frac{1}{2}$ (e) $\frac{2}{5}$

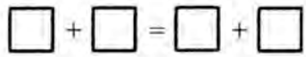
5. Javier quería cortar un pedazo de hilo en nueve pedazos de la misma longitud y marcó los puntos donde debía cortar. Lupita quería cortar el mismo pedazo de hilo en sólo ocho pedazos de la misma longitud y marcó los puntos donde debía cortar. Si el hilo se corta en todos los puntos que ambos marcaron, ¿cuántos pedazos de hilo se obtendrán?

(a) 15 (b) 16 (c) 17 (d) 18 (e) 19

6. En la figura de la derecha se ve un collar con 6 cuentas, pero está enredado. ¿Cuál es la figura que muestra el mismo collar desenredado?

(a)  (b)  (c)  (d)  (e) 

7. Cuatro de los números 1, 3, 4, 5 y 7 se van a escribir, uno en cada cuadrado, de manera que la igualdad sea correcta. ¿Cuál es el que no se va a usar?

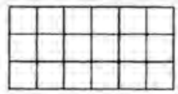


(a) 1 (b) 3 (c) 4 (d) 5 (e) 7

8. En la figura, la línea punteada y el camino negro forman siete triángulos equiláteros. La longitud de la línea punteada es 20. ¿Cuál es la longitud del camino negro?

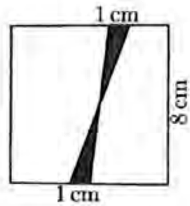
(a) 25 (b) 30 (c) 35 (d) 40 (e) 45

9. Martín quiere colorear los cuadrados del rectángulo de tal manera que una tercera parte de los cuadrados sean azules, la mitad sean amarillos y el resto sean rojos. ¿Cuántos deben ser rojos?



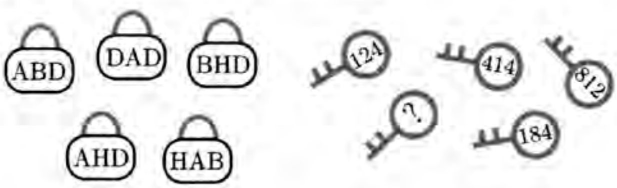
(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4 (e) 5

10. Dos segmentos, cada uno de 1 cm de largo, están marcados en lados opuestos de un cuadrado de lado 8 cm. Los extremos de los segmentos se unen como se muestra en el diagrama. ¿Cuál es el área sombreada?



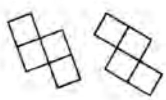
(a) $2\,\text{cm}^2$ (b) $4\,\text{cm}^2$ (c) $6.4\,\text{cm}^2$ (d) $8\,\text{cm}^2$ (e) $10\,\text{cm}^2$

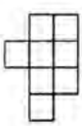
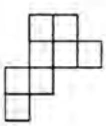
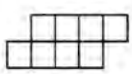
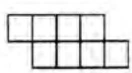
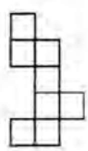
11. Cada una de las llaves abre cada uno de los candados. Los números de las llaves corresponden a las letras de los candados. ¿Qué está escrito en la última llave?



(a) 382 (b) 282 (c) 284 (d) 823 (e) 824

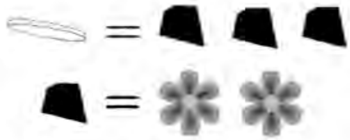
12. Celerino tiene las dos piezas de cartón que se muestran a la derecha. ¿Cuál de las piezas puede hacer usando las dos piezas?



(a)  (b)  (c)  (d)  (e) 

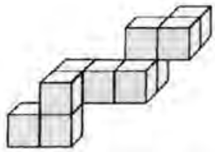
Examen Canguro Matemático Mexicano 2017
Nivel Cadete

1. En el país de las joyas se pueden cambiar 3 zafiros por una moneda. Un zafiro se puede cambiar por 2 flores. ¿Cuántas flores pueden cambiarse por 2 monedas?



(a) 6 (b) 8 (c) 10 (d) 12 (e) 14

2. Mauricio quiere poner la construcción en una caja. ¿Cuáles de las medidas de la caja corresponden es lo más chico que puede usar?

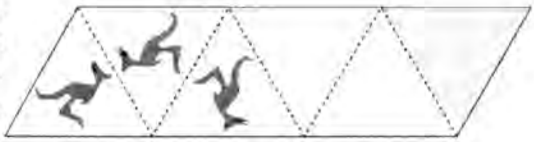


(a) $3 \times 3 \times 4$ (b) $3 \times 5 \times 5$ (c) $3 \times 4 \times 5$ (d) $4 \times 4 \times 4$ (e) $4 \times 4 \times 5$

3. Ana Claudia quiere escoger dos días de la semana para trotar; en esos días trotará cada semana. Si no quiere trotar dos días consecutivos, ¿de cuántos maneras puede escoger los días?

(a) 16 (b) 14 (c) 12 (d) 10 (e) 8

4. En la franja triangulada de la derecha, cada línea punteada actúa como espejo. En el primer triángulo hay un canguro, y se muestran las dos primeras reflexiones. ¿Qué figura debe ir en el triángulo sombreado?



(a) (b) (c) (d) (e)

5. El mantel que se muestra en la figura tiene un fondo oscuro y un patrón regular formado por cuadrados más claros ¿Qué porcentaje del mantel es oscuro?

(a) 16 % (b) 24 % (c) 25 % (d) 32 % (e) 36 %

6. Isa escribirá un número entero en cada cuadrito de la cuadrícula que se muestra, de manera que la suma de los números de cualesquiera dos cuadritos que compartan un lado sea la misma. Ya escribió dos números, como se muestra. ¿Cuál es la suma de todos que quedarán en la cuadrícula?

2		
		3

(a) 18 (b) 20 (c) 21 (d) 22 (e) 23

7. Cuatro primas, Ema, Iva, Rita y Zina, tienen las edades de 3, 8, 12 y 14 años, pero no necesariamente en ese orden. La suma de las edades de Zina y Ema es divisible por 5. La suma de las edades de Zina y Rita también es divisible por 5. ¿Cuántos años tiene Iva?

(a) 14 (b) 12 (c) 8 (d) 5 (e) 3

8. Una hormiga empezó en el extremo izquierdo de un tubo y caminó $\frac{2}{3}$ de su longitud. Una catarina empezó en el extremo derecho del mismo tubo y caminó $\frac{3}{4}$ de su longitud. ¿Qué fracción de la longitud del tubo separa a la hormiga de la catarina?

(a) $\dfrac{3}{8}$ (b) $\dfrac{5}{7}$ (c) $\dfrac{5}{12}$ (d) $\dfrac{1}{2}$ (e) $\dfrac{1}{12}$

9. El dibujo muestra cuatro corazones, unos dentro de otros. Sus áreas son $1\,\text{cm}^2$, $4\,\text{cm}^2$, $9\,\text{cm}^2$ y $16\,\text{cm}^2$. ¿Cuál es el área sombreada?

(a) 9 cm^2 (b) 10 cm^2 (c) 11 cm^2 (d) 12 cm^2 (e) 13 cm^2

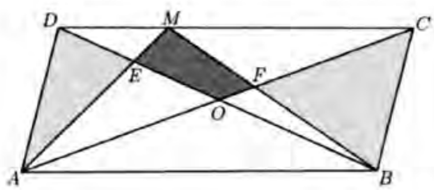
10. Este año hubo más de 800 corredores participando en una carrera. Exactamente el 35 % de los corredores fueron mujeres, y participaron 252 hombres más que mujeres. ¿Cuántos corredores hubo en total?

(a) 802 (b) 810 (c) 822 (d) 824 (e) 840

11. El máximo común divisor de dos nuúmeros enteros es 6, y su mínimo común múltiplo es 900. ¿Cuál de las siguientes no puede ser su suma?

(a) 318 (b) 270 (c) 186 (d) 462 (e) 906

12. El diagrama muestra un parelelogramo $ABCD$ con área 1. El punto de intersección de las diagonales del paralelogramo es O. El punto M está sobre DC. El punto de intersección de AM y BD es E, y el punto de intersección de BM y AC es F. La suma de las áreas de los triángulos AED y BFC es $\frac{1}{3}$. ¿Cuál es el área del cuadrilátero $EOFM$?



(a) $\frac{1}{12}$ (b) $\frac{1}{8}$ (c) $\frac{1}{10}$ (d) $\frac{1}{6}$ (e) $\frac{1}{14}$

Examen Canguro Matemático Mexicano 2017
Nivel Estudiante

1. ¿A cuál de los siguientes es igual $\dfrac{20 \cdot 17}{2+0+1+7}$?

(a) 3.4 (b) 17 (c) 34 (d) 201.7 (e) 340

2. Seis niños se toman de las manos y bailan en círculo. Empiezan como se muestra y giran sin soltarse de las manos. ¿Cuáles de las siguientes posiciones son imposibles?

(a) 1, 2 y 4 (b) 2 (c) 2, 3 y 4 (d) 4 y 5 (e) 1, 3 y 5

3. Cinco cajas tienen pelotas azules y rojas. En las opciones se muestra la cantidad de pelotas que tiene cada una. Alex quiere escoger una de las cajas y, sin ver, sacar sólo una pelota. ¿Cuál de las cajas debe escoger para tener la mayor probabilidad de que la pelota que saque sea azul?

(a) 10 azules y 8 rojas (b) 6 azules y 4 rojas (c) 8 azules y 6 rojas
(d) 7 azules y 7 rojas (e) 12 azules y 9 rojas

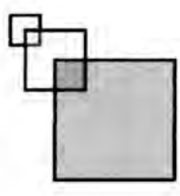
4. Dos números positivos a y b son tales que 75 % de a es igual a 40 % de b. ¿Cuál de las siguientes igualdades es la correcta?

(a) $15a = 8b$ (b) $7a = 8b$ (c) $3a = 2b$ (d) $5a = 12b$ (e) $8a = 15b$

5. Keila tenía el triple de helado que su hermana Kima, así que decidió darle la mitad de su helado. Sin embargo ahora se dan cuenta que Kima tiene más. ¿Qué porcentaje del helado que tiene ahora Kima debe regresarse a Keila para que las dos tengan la misma cantidad?

(a) 10 % (b) 20 % (c) 25 % (d) 40 % (e) 50 %

6. En la figura se muestran tres cuadrados. Las longitudes de sus lados son 2 cm, 4 cm y 6 cm. Un vértice del cuadrado de enmedio es el centro del más pequeño, y un vértice del cuadrado más grande es el centro del de enmedio. ¿Cuál es el área de la figura?



(a) $6\,\text{cm}^2$ (b) $16\,\text{cm}^2$ (c) $27\,\text{cm}^2$ (d) $32\,\text{cm}^2$ (e) $51\,\text{cm}^2$

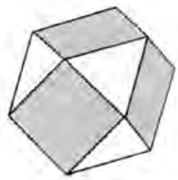
7. Cada uno de los números en la lista 1, 2, 3. 4, 5, 6, 7, 8, 9 debe sustituirse por lo que resulte de sumarle ya sea 2 o 5 (por ejemplo, la nueva lista podría ser 6, 4, 5, 6, 10, 8, 12, 10. 14). ¿Cuál es el número más pequeño de resultados diferentes que se pueden obtener?

(a) 5 (b) 6 (c) 7 (d) 8 (e) 9

8. En la función de teatro de hoy un sexto de la audiencia son niños. Dos quintos de los adultos son hombres. ¿Qué fracción de la audiencia son mujeres adultas?

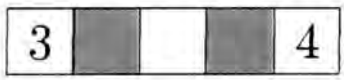
(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{3}$ (c) $\frac{1}{4}$ (d) $\frac{1}{5}$ (e) $\frac{2}{5}$

9. Las caras del poliedro dibujado son triángulos y cuadrados. Cada cuadrado está rodeado por 4 triángulos y cada triángulo está rodeado por 3 cuadrados. Se sabe que hay 6 cuadrados. ¿Cuántos triángulos hay?



(a) 5 (b) 6 (c) 7 (d) 8 (e) 9

10. David escribirá un número en cada casilla del dibujo que se muestra. Ya escribió dos de los números. Él quiere que la suma de todos los números sea 35. que la suma de los números en las tres primeras casillas sea 22, y que la suma de los números en las últimas tres casillas sea igual a 25. ¿Cuál es el producto de los números que escribirá en las casillas sombreadas?

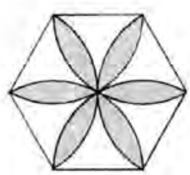


(a) 63 (b) 108 (c) 0 (d) 48 (e) 39

11. Cada 3 minutos sale un autobús del aeropuerto y le toma 60 minutos llegar al centro de la ciudad. Un carro sale del aeropuerto al mismo tiempo que uno de los autobuses, usa la misma ruta que los autobuses, y le toma 35 minutos llegar al centro de la ciudad. ¿Cuántos autobuses rebasa el carro en su camino al centro de la ciudad, excluyendo al autobús con el que salió?

(a) 8 (b) 10 (c) 11 (d) 12 (e) 13

12. La figura muestra un hexágono regular cuyos lados miden 1. La flor se construyó con sectores de círculo de radio 1 con centro en los vértices del hexágono. ¿Cuál es el área de la flor?



(a) π (b) $\frac{3\pi}{2}$ (c) $4\sqrt{3}-\pi$ (d) $\frac{\pi}{2}+\sqrt{3}$ (e) $2\pi-3\sqrt{3}$

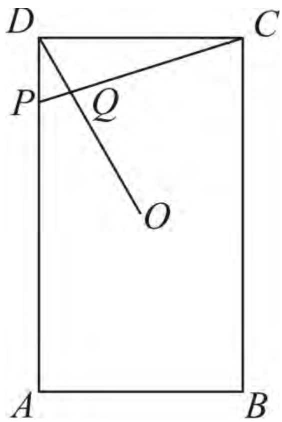
XXI CONCURSO NACIONAL DE MATEMÁTICAS PIERRE FERMAT

Examen para Nivel Secundaria

2017 FINAL

1. Sea x un número mayor o igual a cero, la ***parte entera*** $[x]$ de x es el máximo número entero menor que x. Por ejemplo: $[2.35] = 2$, $[345.768] = 345$, $[\pi] = 3$. Calcular la parte entera del número $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^6$.

2. En la siguiente figura el punto O es el centro del rectángulo $\square ABCD$. El punto Q es la intersección del segmento $\overline{CP}$ y el segmento $\overline{DO}$. El punto P está sobre el lado $\overline{AD}$ de tal manera que los puntos O, C, D y P están sobre una misma circunferencia y tres veces la medida del ángulo $\measuredangle ODP$ es igual a la suma de la medida de los ángulos $\measuredangle CDO$ y $\measuredangle PCD$.



   a) Determinar la medida del ángulo $\measuredangle ODP$,

   b) Determinar $\dfrac{BC}{AB}$, y

   c) Verificar que el radio de la circunferencia que pasa por los puntos O, C, D y P, mide DP.

3. Calcular la suma de los primeros 9 términos de la serie
$$\frac{1^3}{1}+\frac{1^3+2^3}{1+3}+\frac{1^3+2^3+3^3}{1+3+5}+\cdots$$

NOTA del EDITOR: Los exámenes que se incluyen en esta Guía, han sido corregidos de los errores tipográficos detectados por coordinadores de algunas sedes.

4. Sea $A(2,7)$ un vértice de un triángulo en el plano, el vértice *B* está sobre el eje *y*, y el tercer vértice, el *C,* está sobre la línea $y = x.$ Calcular el mínimo perímetro que puede tener un triángulo con estas propiedades.

5. Considera seis triángulos rectángulos de ángulos 30°,60° y cuya hipotenusa es de 2 unidades. Utilizando los seis triángulos se construye un hexágono regular con hueco, más aún es posible construir dos hexágonos de distinto tamaño (uno a la vez utilizando los seis triángulos).
   a) Calcular el perímetro de cada hexágono.
   b) Calcular el área del hexágono, es decir, calcular el área de la superficie que se cubre con los triángulos y el área del hueco, en cada caso.
   c) La relación de estas dos áreas en cada hexágono.
   d) Calcular la medida de la apotema para cada hexágono.

Examen para Nivel Bachillerato
2017 FINAL

1. Sea $P(p,q)$ un punto sobre una circunferencia con ecuación $x^2 + y^2 = px + qy$, $p,q \neq 0,$ Probar que si dos distintas cuerdas del círculo que pasan por *P*, son bisecadas por el eje *x*, entonces se tiene $p^2 > 8q^2$.
2. Sea $\diamond ABCD$ un cuadrilátero convexo en el cual se cumple que los lados $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$ son líneas paralelas, mientras que la diagonales $\overleftrightarrow{AC}$ y $\overleftrightarrow{BD}$ son líneas perpendiculares. Demuestre lo siguiente:
   a) Que los lados se relacionan de la siguiente manera:
   $$(AD)^2 + (BC)^2 = (AB)^2 + (CD)^2$$
   b) Que las diagonales se relacionan con los lados paralelos de la siguiente manera:
   $$(AC)^2 + (BD)^2 = (CD + AB)^2.$$

3. Si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es una función que satisface:
   i) $\forall x\in\mathbb{R}$: $f(-x)=-f(x)$;
   ii) $\forall x\in\mathbb{R}$: $f(x+1)=f(x)+1$ y
   iii) $\forall x\in\mathbb{R}$: $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{f(x)}{x^2}$, $(x\neq 0)$, verificar que $\forall x\in\mathbb{R}$: $f(x)=x$.

4. Si $z=\dfrac{2\operatorname{sen}\theta}{1+\operatorname{sen}\theta+\cos\theta}$, entonces, ¿a que es igual $\dfrac{1-\cos\theta+\operatorname{sen}\theta}{1+\operatorname{sen}\theta}$? en términos de z.

5. Verificar que $19^{93}-13^{99}$ es un entero positivo divisible por 81.

Examen para Nivel Superior
2017 FINAL

1. Demostrar que para cualquier triángulo $\triangle ABC$ se cumple:
   $\operatorname{sen}A\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C\leq\frac{3\sqrt{3}}{8}$, y que se tiene la igualdad sí y solo si el triángulo es equilátero.
2. Calcular la integral $\displaystyle\int_0^1\frac{x^{\cos a}-1}{\ln x}\,dx$.
3. Expresar al siguiente polinomio como un cociente (no trivial) de polinomios $\dfrac{f(x)}{g(x)}$: $2x+4x^3+6x^5+\cdots+2nx^{2n-1}$.
4. Si $\theta=\alpha,\beta$ son distintas raíces de la ecuación $a\cos\theta+b\operatorname{sen}\theta=c$, entonces se tiene: $\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$.

5. Hallar todas las matrices $X \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$, tales que

$$AXA^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2017 & 7(2017) & 2(2017) \\ 0 & 7(2017) & 49(2017) & 14(2017) \\ 0 & 2(2017) & 14(2017) & 4(2017) \end{pmatrix},$$

donde $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 1 \\ 7 & 2 & 7 \end{pmatrix}$. Nota: A^t es la *transpuesta* de A.

XXI CONCURSO NACIONAL DE MATEMÁTICAS PIERRE FERMAT

Examen para Nivel Secundaria

2017 Eliminatoria

1. La suma $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{8\cdot 9} + \frac{1}{9\cdot 10}$ es igual a

   a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{9}{10}$ c) $\frac{7}{8}$ d) $\frac{3}{4}$

2. La cabina de pasajeros de un avión tiene 108 asientos. Hay un asiento vacío por cada dos asientos ocupados. ¿Cuántos pasajeros hay en el avión?

   a) 36 b) 72 c) 56 d) 64

3. La fracción $\frac{2017 + 2\times 2017 + 3\times 2017 + 4\times 2017}{2017 + 2017}$ es igual a:

   a) $\frac{5}{2}$ b) 5 c) 2017 d) $\frac{2017}{2}$

4. Eduardo tiene 201 monedas. Un tercio de ellas son de \$1, otro tercio de \$5, y el resto de \$10. ¿Cuántos pesos tiene Eduardo?

    a) 1072 b) 201 c) 972 d) 1062

5. Pedro tiene 4 hermanas y 6 hermanos. Su hermana Gabriela tiene x hermanas y z hermanos. ¿Cuánto vale el producto de x por z?

    a) 14 b) 10 c) 21 d) 15

6. Elegimos un número entero. Lo duplicamos, duplicamos el resultado otra vez, lo duplicamos una tercera y una cuarta vez. ¿Cuál de los siguientes números NO puede, con seguridad, ser el resultado final?

    a) 80 b) 1200 c) 48 d) 84

7. Un libro de Matemáticas es el 50% más caro que uno de Física. ¿Qué tanto por ciento de descuento habría que hacer en el precio del libro de Matemáticas para que su precio sea igual al de Física ?

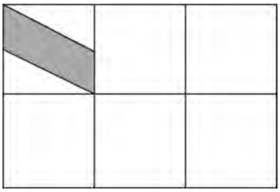
    a) 50% b) 35% c) 33,333...% d) 25%

8. En una tienda dos juguetes tienen el mismo precio. El primero reduce su precio, haciéndose 5 % más barato, pero el otro incrementa su precio en un 15%. Ahora los precios difieren en \$6.00.
   ¿Cuál es ahora el precio del juguete más barato?

    a) \$1,50 b) \$6.00 c) \$28,50 d) \$30.00

9. La parte negra ¿Qué fracción es de la figura?

    a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{1}{8}$ c) $\frac{1}{10}$ d) $\frac{1}{12}$



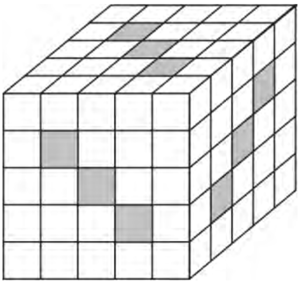
10. Mi mamá se dio cuenta que mi reloj despertador se retrasa 20 segundos por hora. ¿Cuánto se atrasará al cabo de 24 horas?

a) 7 minutos b) 8 minutos c) 9 minutos d) 10 minutos

11. En una competencia de atletismo elegiste correr los 10 km. planos. Cuando has recorrido 9641 metros, 758 decímetros y 58200 milímetros te tienes que detener, agotado y sin poder continuar. ¿Cuántos metros te faltan para llegar a la meta?

a) 1060 m b) 225 m c) 106 m d) 532 m

12. En un cubo de 5x5x5 se quitan las hileras y columnas de cubitos que atraviesan al cubo grande en la forma indicada en la figura. ¿Cuántos cubos pequeños quedan?



a) 88 b) 86 c) 77 d) 89

13. La suma de dos números naturales es 77. Si el primer número se multiplica por 8 y el segundo por 6, se obtienen dos productos iguales. El mayor de los dos números es

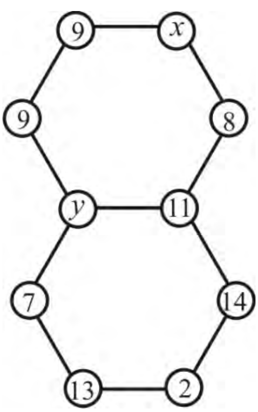
a) 23 b) 33 c) 43 d) 44

14. ¿Cuál es la diferencia entre la suma de los primeros 1000 números pares estrictamente positivos y la suma de los 1000 primeros números impares estrictamente positivos?

a) 1 b) 200 c) 500 d) 1000

15. La suma de los números en cada círculo debe ser 55. ¿Qué número es x?

a) 9 b) 10 c) 13 d) 16



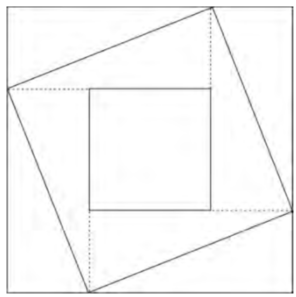
16. Un triángulo rectángulo con catetos de longitudes 6 cm y 8 cm se dobla a lo largo de una cierta recta, paralela a uno de los catetos ¿Cuál de las siguientes puede ser el área del polígono resultante?

a) 9 cm2 b) 12 cm2 c) 18 cm2 d) 24 cm2

17. La longitud de un campo rectangular es 60 m y su área 2400 m ^{2}. Hallar la longitud de otro campo rectangular cuya área y anchura son, respectivamente, la mitad que las del primero.

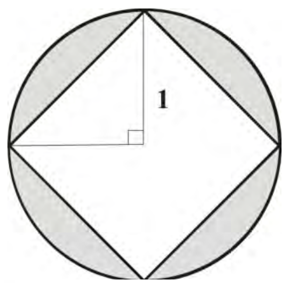
a) 20 m b) 40 m c) 60 m d) 80 m

18. El cuadrado grande tiene área 16 unidades cuadradas; el más pequeño, 4. ¿Cuál es el área del cuadrado intermedio?



a) 8 b) $\frac{8}{2}$ c) 10 d) $\frac{10}{2}$

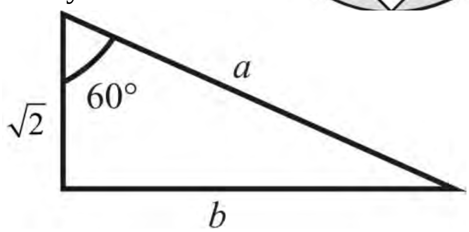
19. ¿Cuál es el perímetro de la parte sombreada de la figura?



a) $4\sqrt{2}+2\pi$ b) $2\sqrt{2}+2\pi$

c) $\pi+2\sqrt{2}$ d) $4\sqrt{2}+\pi$

20. Con los datos del triangulo rectángulo de la figura ¿cuáles son los valores de *a* y *b*?



a) $a=2\sqrt{6}, \quad b=\sqrt{2}$

b) $a=\sqrt{6}, \quad b=2\sqrt{2}$

c) $a=2\sqrt{2}, \quad b=\sqrt{6}$

d) $a=\sqrt{2}, \quad b=6\sqrt{2}$

21. Calcular $a + b + c$, si $\frac{a}{4-a} = \frac{b}{5-b} = \frac{c}{7-c} = 3$

a) 12 b) 3 c) 9 d) 6

22. ¿Cuál es la simplificación de la fracción $\frac{5^{1/2}7^{1/4}}{5^{1/3}7^{1/2}}$?

a) $7 \cdot \sqrt[6]{5}$ b) $\frac{\sqrt[6]{5}}{\sqrt[4]{7}}$ c) $\sqrt{7} \cdot \sqrt[6]{5}$ d) $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt[6]{5}}$

23. ¿Cuál es la solución de la ecuación $\frac{4}{7}x + \frac{1}{3} = -\frac{2}{5}$?

a) $\frac{7.7}{6}$ b) $-\frac{7}{60}$ c) $-\frac{7.7}{60}$ d) $-\frac{7.7}{6}$

24. Si evaluamos $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 4x + 1}$ en $\sqrt{2}$, obtenemos:

a) $\frac{13 + 2\sqrt{2}}{23}$ b) $-\frac{13 + 2\sqrt{2}}{23}$ c) $-\frac{16 + 6\sqrt{2}}{23}$ d) $\frac{16 + 6\sqrt{2}}{23}$

25. El producto de la expresión algebraica $\left(a^{1/3} - b^{1/2}\right)\left(a^{2/3}b^{2/3} - a^2b^{1/3}\right)$ es igual a:

a) $ab^{2/3} - a^{2/3}b^{7/6} - a^{7/3}b^{1/3} + a^2b^{5/6}$ b) $a^{2/3}b^{2/3} - a^2b^{2/3} + a^{2/3}b^{2/3} - a^2b^{2/3}$

c) $a^{1/3}b^{2/3} - a^{5/6}b^{2/3} + a^{2/3}b^{7/3} - a^2b^{2/3}$ d) $a^{2/3}b^{5/3} - a^2b^{2/3} + a^2b^{2/3} - a^2b^{2/3}$

Examen para Nivel Bachillerato
2017 Eliminatoria

1. Juan y Pedro compiten en la carrera de 100 mts. Pedro corre la distancia en medio minuto y Juan la corre en la centésima parte de una hora. ¿Quién corre más rápido? y ¿cuál es la diferencia de tiempo?

   a) Pedro, 36 segundos b) Juan, 24 segundos
   c) Pedro, 6 segundos d) Pedro, 4 segundos

2. Pedro tiene una caja de zapatos llena de cubitos de madera. Le quita la capa superior, que tiene 77 cubitos. Luego le quita una de las capas laterales que son 55 cubitos. Finalmente quita la capa frontal. ¿Cuántos cubitos quedan en la caja?

   a) 203 b) 256 c) 300 d) 295

3. Si vemos el número "2017" en un espejo su reflejo será:

   a)  b)  c)  d) 

4. Sean $a = 9 - (-6)$, $b = (-3)(-5)$, $c = 2 - 17$, $d = 0 - (-15)$ y $e = (-45) \div (-3)$, ¿cuántos de estos resultados no son iguales a 15?

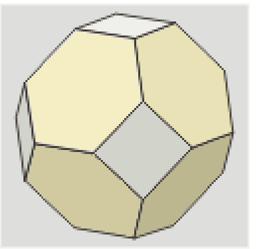
   a) 0 b) 1 c) 2 d) 4

5. Si el promedio de edades de los padres de Pedro es de 42 años y la madre de Pedro es 6 años menor que el padre. Si la media de las edades de Pedro y de su padre es 30 años. ¿Cuántos años tiene Pedro?

   a) 6 años b) 19 años c) 15 años d) 13 años

6. Un octaedro tiene todos sus vértices recortados, como se muestra en la figura. ¿Cuántas aristas tiene el sólido resultante?

   a) 26 b) 30 c) 36 d) 40

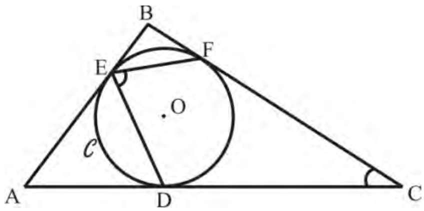


7. Los enteros positivos a y b, $a > b$, no tienen divisores comunes mayores que 1, y $ab = 300$. ¿Cuántos pares (a, b) distintos satisfacen estas

condiciones?

a) 1 b) 4 c) 3 d) 9

8. La figura muestra el triángulo $\triangle ABC$ y el círculo $\mathcal{C}$ de centro O inscrito en el triángulo. D, E, F son los puntos donde el círculo es tangente a los lados del triángulo. Si $\sphericalangle DCF = 44°$, ¿cuánto mide $\sphericalangle DEF$?



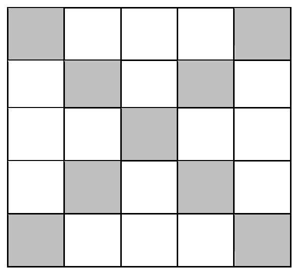
a) 46 b) 58 c) 68 d) no se puede determinar.

9. Una pirámide tiene 7 caras. ¿Cuántas aristas tiene?

a) 12 b) 9 c) 8 d) 18

10. En un cuadrado de lado 2017, los cuadritos son de lado 1, las diagonales están coloreadas (como en la figura, donde el cuadrado tiene lado 5). ¿Cuál es el área blanca?

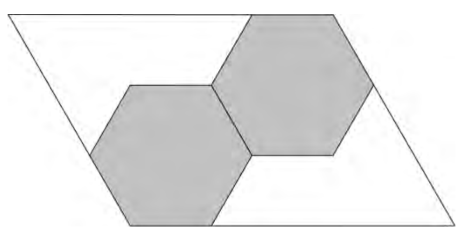
a) 2016^2 b) 2016x2015 c) 2017^2 d) 2017x2018



11. ¿Cuál es el residuo al dividir $2^{25}3^{14}7^{32} - 5$ por 14?

a) 0 b) 9 c) 5 d) 8

12. En la figura los dos hexágonos regulares son iguales. ¿Qué fracción del área del paralelogramo es el área en blanco?



$a)\frac{1}{2}$ $b)\frac{1}{3}$ $c)\frac{1}{4}$

$d)\frac{1}{5}$

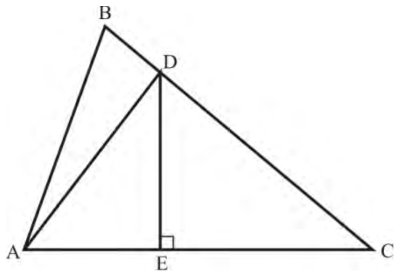
13. El único entero n tal que $\left[\left(2^{2^n}+1\right)\left(2^{2^n}-1\right)+1\right]^{\frac{1}{2}}=256$ está contenido en el conjunto:

a) {1, 2, 3} b) {4, 5, 6} c) {7, 8, 9 } d) {10, 11, 12}

14. Sara para su tarea tiene que resolver 40 preguntas. Su madre le ofrece $5 por cada pregunta que contesta correctamente, pero Sara debe pagar $10 por cada respuesta incorrecta. Después de contestar a todas las preguntas, Sara recibe $20 de su madre. ¿ Cuántas preguntas contestó correctamente?

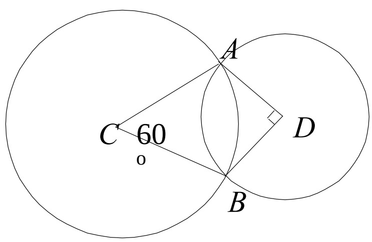
a) 25 b) 26 c) 27 d) 28

15. La figura muestra un triángulo isósceles $\triangle ABC$, con $AC = BC$. Si ED es perpendicular a AC, el ángulo $\sphericalangle ADB$ es 100º y el ángulo $\sphericalangle CAD$ es 30º entonces ¿cuánto mide el ángulo $\sphericalangle DAB$?



a) 30º b) 25° c) 15º d) 20º

16. Las circunferencias de centros C y D se cortan en los puntos A y B, como se ve en la figura. El ángulo $\sphericalangle ACB = 60°$ y el ángulo $\sphericalangle ADB = 90°$. ¿Cuál es la razón del radio del círculo mayor al del menor?



a) 4:3 b) $\left(2^{1/2}\right):1$ c) 3:2 d) $\sqrt{3}:1$

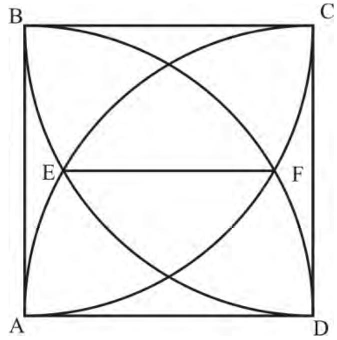
17. La representación decimal de un número de cinco cifras *abcde* tiene la propiedad de que a partir de la tercera es igual a la suma de las dos cifras anteriores. ¿Cuántos números de seis cifras tienen esta propiedad?

a) 5 b)1 c)2 d) 3

18. El factorial de un número natural n es el producto $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$. Si $n! = 2^{15} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13$, entonces n es:

a) 13 b) 14 c) 15 d) 16

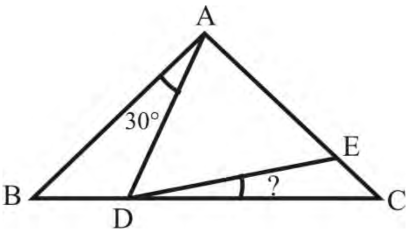
19. En la figura $ABCD$ es un cuadrado de lado 1 y los cuartos de círculo tienen centros en A, B, C y D. ¿Cuál es la longitud de EF?



a) $\sqrt{3}-1$ b) $\frac{3}{4}$

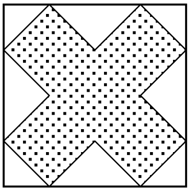
c) $\sqrt{5}-\sqrt{2}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

20. En el triángulo $\triangle ABC$, $AB = AC$, $AD = AE$ y $\sphericalangle BAD = 30°$. ¿Cuál es la medida del ángulo $\sphericalangle CDE$?



a) 10° b) 15° c) 20° d) 25°

21. En la figura, la cruz tiene un perímetro de 12 unidades (u) ¿Cuál es el área del cuadrado?



a) 24 u^2 b) 18 u^2

c) 8 u^2 d) $3u^2$

21. El valor de la expresión $\operatorname{sen}^8(75°) - \cos^8(75°)$ es:

a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\sqrt{3}$ c) $\frac{7\sqrt{3}}{16}$ d) 1

22. Consideremos un cubo de lado 2 y una esfera S con centro en el centro del cubo. Sea C el conjunto de los puntos de la superficie del cubo y S el conjunto de los puntos de la superficie de la esfera. El conjunto $C \cap S$ consta de seis circunferencias si y sólo si el radio r de la esfera verifica las desigualdades

a) $1 < r \leq \sqrt{2}$ b) $1 \leq r < \sqrt{2}$ c) $r \leq \sqrt{2}$ d) $1 < r < \sqrt{3}$

23. La suma de las raíces del conjunto de ecuaciones dado por la igualdad $\left|\left|1-|x|\right|-5\right| = 6 - \frac{x^2}{3}$ es:

a) 0 b) 4 c) 2 d) otro valor

24. Los enteros positivos x e y no tienen divisores comunes mayores que 1, y se cumple que $xy = 350$. ¿Cuál es el menor valor posible para $x+y$?

a) 30 b) 35 c) 39 d) 56

Examen para Nivel Superior
2017 Eliminatoria

1. El valor del límite $\lim_{n\to\infty} \frac{1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4}{n^5} - \lim_{x\to\infty} \frac{1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3}{n^5}$ es igual a:

a) 0 b) 14 c) 15 d) 130

2. El valor del límite $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln x^{729e} - 729e}{x-e}$ es

a) 729 b) 512 c) 100 d) ninguno de los anteriores.

3. Sean v_1, v_2, v_3 y v_4 vectores cuyas magnitudes son, respectivamente, iguales a las áreas de las caras F_1, F_2, F_3 y F_4 de un tetraedro y cuyas direcciones son perpendiculares a las caras y con sentido hacia el exterior del tetraedro, entonces $|v_1+v_2+v_3+v_4|$ es igual a:

a) 0 b) 1 c) 2 d) 4

4. Un paralelepípedo rectangular tiene lados de longitud a, b, c. La mínima distancia entre una arista de longitud a y la diagonal que no la intersecta es

a) $\dfrac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ b) $\dfrac{a(b+c)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ c) $\dfrac{bc}{\sqrt{b^2+c^2}}$ d) $\dfrac{a^2}{\sqrt{b^2+c^2}}$

5. Sea $\triangle ABC$ un triángulo rectángulo con $\angle A = 90°$. Se levantan dos perpendiculares al plano del triángulo en los puntos A y B, y se consideran los puntos M y N en estas perpendiculares del mismo lado del plano y tales que $BN < AM$ y $AC = 2a$, $AB = a\sqrt{3}$, $AM = a$ y el ángulo entre los planos MNC y ABC es 30°. El área del triángulo $\triangle MNC$ es:

a) a^2 b) $a^2\sqrt{2}$ c) $2a^2$ d) $4a^2$

6. El valor de la integral $\int_0^\infty e^{-4x}\operatorname{sen}(5x)\,dx$ es:

a) 0 b) 2 c) 4 d) 1

7. Si el cuarto término de la expansión de $\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{1}{x}\right)^n$ es $\dfrac{5}{2}$, entonces a es divisible por

a) 8 b) 4 c) 2 d) 1

8. Si $\begin{vmatrix} 1+\operatorname{sen}^2\theta & \cos^2\theta & 4\operatorname{sen}4\theta \\ \operatorname{sen}^2\theta & 1+\cos^2\theta & 4\operatorname{sen}4\theta \\ \operatorname{sen}^2\theta & \cos^2\theta & 1+4\operatorname{sen}4\theta \end{vmatrix} = 0$ entonces θ vale

a) $\dfrac{7\pi}{24}$ b) $\dfrac{5\pi}{24}$ c) $\dfrac{3\pi}{24}$ d) $\dfrac{\pi}{24}$

9. Tres círculos del mismo radio r son tangentes dos a dos. El radio del menor círculo tangente a los tres círculos dados es?

a) $\left(2+\sqrt{3}\right)r$ b) $\dfrac{\left(2+\sqrt{3}\right)}{\sqrt{3}}r$ c) $\dfrac{\left(2-\sqrt{3}\right)}{\sqrt{3}}r$ d) $\left(2-\sqrt{3}\right)r$

10. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función tal que $\forall x,y\in\mathbb{R}:\left|f(x)-f(y)\right|\le\left|x-y\right|^2$. Entonces la función $h(x)=\int f(x)dx$ es

a) es continua en todo punto b) solo es discontinua en $x=0$

c) es discontinua en los enteros d) $h(0)=0$

11. Sea $A=\begin{bmatrix}0&5\\0&0\end{bmatrix}$ y $f(x)=1+x+x^2+\ldots+x^{16}$ entonces $f(A)$ es igual a

a) la matriz cero b) $\begin{bmatrix}1&5\\0&1\end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix}1&5\\0&0\end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix}0&5\\1&1\end{bmatrix}$

12. Sean *a*, *b*, *c* distintos números no negativos y los tres vectores, $ai+aj+ck$, $i+k$, $ci+cj+bk$, en el mismo plano, entonces la ecuación cuadrática $ax^2+bx+c=0$ tiene

a) raíces reales e iguales b) raíces reales y distintas
c) raíces reales positivas d) Ninguna de las anteriores.

13. Si A y B son dos matrices cuadradas de orden 3x3 que satisfacen $AB = A$ y $BA = B$, entonces $(A+B)^7$ es igual a:

a) $7(A+B)$ b) $7\cdot I_{3\times3}$ c) $64(A+B)$ d) $128\cdot I_{3\times3}$

14. Si los vectores unitarios v_1,v_2,v_3 satisfacen $v_1\bullet v_2=v_1\bullet v_3$ y el ángulo entre v_2 y v_3 es $\dfrac{\pi}{3}$. Entonces el valor de $\left|v_1\times v_2-v_1\times v_3\right|$ es

a) $\dfrac{1}{2}$ b) 1 c) 2 d) ninguno de los anteriores

15. El valor del límite $\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n}\left(\sum_{t=0}^{r-1}\frac{1}{5^n}\binom{n}{r}\binom{r}{t}\cdot 3^t\right)$ es igual a

a) 4 b) 3 c) 1 d) ninguno de los anteriores

16. Sea $P(n)=5^n-2^n$ con m y n enteros impares positivos. Si $P(n)$ es divisible por $3m$ entonces el valor mínimo de m y n es

a) 13 b) 11 c) 1 d) 5

17. Si $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{y+\cdots\infty}}}}$, entonces $\frac{dy}{dx}$ es igual a

a) $\frac{1}{2y-1}$ b) $\frac{y^2-x}{2y^3-2xy-1}$ c) $2y-1$ d) ninguno de los anteriores

18. Si $a+b+c=0$, $a^3+b^3+c^3=3$ y $a^5+b^5+c^5=10$, entonces $a^4+b^4+c^4$ es igual a

a) 12 b) 10 c) 8 d) ninguno de los anteriores

19. Sea $\omega\neq 1$ una raíz cúbica de la unidad. Si

$$\left(3-3\omega+2\omega^2\right)^{4n+3}+\left(2+3\omega-3\omega^2\right)^{4n+3}+\left(-3+2\omega+2\omega^2\right)^{4n+3}=0$$

entonces el conjunto de posibles valores para n es:

a) $\mathbb{N}$ b) $\{4k\mid k\in\mathbb{N}\}$ c) $\mathbb{N}-\{3k\mid k\in\mathbb{N}\}$ d) $\{6k\mid k\in\mathbb{N}\}$

20. Dada la curva $x^2y^3=c$, con c una constante, entonces la parte de la tangente a la curva que esta entre los ejes de coordenadas está dividida por el punto de tangencia en la razón:

a) $3:5$ b) $2:5$ c) $3:2$ d) $1:5$

21. Si $f(x)=\begin{vmatrix} 1 & x & x+1 \\ 2x & x(x-1) & (x+1)x \\ 3x(x-1) & x(x-1)(x-2) & (x+1)x(x-1) \end{vmatrix}$, entonces $f(100)$ es igual a:

a) 0 b) 1 c) 100 d) -100

22. Sea $f(x)$ definida para $x \geq 0$ y con derivada continua. Si satisface $f(0)=1;\ f'(0)=0$ y $(1+f(x))f''(x)=1+x$. Entonces el valor que $f(1)$ no puede tomar es:

a) 0 b) 0.75 c) 0.5 d) 1.35

23. Sea $f(x)=\left(b^2+(a-1)b+2\right)x-\int\left(\operatorname{sen}^2 x+\cos x\right)dx$ una función creciente de $x \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}$, entonces *a* puede tomar el valor:

a) -2 b) 1 c) 5 d) 4

24. El **rango de valores** de *k* para el cual el punto $(2k+1, k-1)$ es un punto interior del segmento más pequeño del círculo $x^2+y^2-2x-4y-4=0$ con respecto a la cuerda $x+y-2=0$ es

a) *k* entre 0 y 2/3 b) *k* entre 0 y 2 c) *k* entre -2/3 y 0 d) Ninguno de los anteriores

25. Si $\begin{vmatrix} a & a^2 & 1+a^3 \\ b & b^2 & 1+b^3 \\ c & c^2 & 1+c^3 \end{vmatrix}=0$ y los vectores $(1,a,a^2),(1,b,b^2),(1,c,c^2)$ son no-coplanares, entonces *abc* es igual a

a) 0 b) 1 c) -1 d) Ninguno de los anteriores

SEDES

Estado de Guanajuato
Centro De Investigación En Matemáticas, A.C. CIMAT
Estado de México
Colegio de Estudios Científicos Y Tecnológicos del Estado de México Plantel
Colegio Panamericano Texcoco, Secundaria y Preparatoria S. C.
Escuela Preparatoria Regional de Zumpango, A.C.
Centro de Apoyo a Estudiantes MATH & ENGLISH, “El gusto por Aprender”
Escuela Preparatoria Oficial 99
Colegio Euro Texcoco
Estado de Morelos
Colegio El Peñón
Colegio Juana de Arco
Estado de Tlaxcala
Departamento de Escuela Secundaria General
Estado de Hidalgo
Unidad Profesional Interdisciplinaria de Ingeniería Campus Hidalgo (UPIIH-IPN)
Estado de Puebla
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de
Instituto Tecnológico Superior de Zacapoaxtla
Bachillerato General Oficial "Jaime Torres Bodet", Ayotoxco de Guerrero
Estado de Nuevo León
Facultad De Ciencias Físico- Matemáticas, de la Universidad Autónoma de Nuevo
Estado de Veracruz
Facultad de Matemáticas, Universidad Veracruzana
Instituto Tecnológico Superior de Perote
Estado de Oaxaca
Instituto Tecnológico de Oaxaca
Universidad del Mar (Campus Puerto Escondido)
Universidad del Papaloapan
Universidad Tecnológica de la Mixteca
Estado de Yucatán
Universidad Autónoma de Yucatán
Estado de Guerrero
Instituto Tecnológico de Iguala
Ciudad de México
Escuela Superior de Física y Matemáticas del I P N

COMITE ORGANIZADOR
Presidente
Miguel Tufiño Velázquez

Coordinación general
Erick Lee Guzmán
Fabio J. Dávila Ojeda

Elaboración de problemas y apoyo técnico

Santiago Marcos Zepeda Martínez
José Oscar González Cervantes
José Humberto Ávila Sandoval
Raciel Vázquez Aguilar
Eliseo Sarmiento Rosales
Alejandro Bribiesca Sánchez
Pablo Lam Estrada
Abelardo Santaella Quintas
Félix Fernández Méndez
Virginia Garrido Adame
Juan Manuel Figueroa Florees
José Luis González Ramírez

Más información: http://www.esfm.ipn.mx/Paginas/pierre-fermat.aspx.