SEP
SECRETARÍA DE
EDUCACIÓN PÚBLICA

Instituto Politécnico Nacional
"La Técnica al Servicio de la Patria"

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

ESCUELA SUPERIOR DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

PROBLEMARIO
PARA TODOS LOS NIVELES

ESFM
Instituto Politécnico Nacional

2017

El concurso comprenderá tres niveles: Secundaria, Medio Superior y Superior.

Requisitos:
Podrán concursar todos los alumnos inscritos en cualquier escuela pública o privada del país, para ello deberán:

1) Inscribirse al nivel escolar que estarán cursando a la fecha de la eliminatoria;
2) Mostrar un comprobante de estudios vigente (credencial o constancia) al momento de presentarse a la eliminatoria.

El Concurso "Pierre Fermat": Constará de dos etapas:

Eliminatoria: 10 de Junio de 2017 a las 10:00 hrs. Consta de un examen de 25 0 30 preguntas de opción múltiple, con 3:00 hrs. para su solución y se aplica en todas las sedes.

Los que obtengan mejor calificación pasarán a la segunda etapa y final.

Final: 2 de septiembre de 2017 a las 10:00 hrs. Consiste de un examen de 5 preguntas de respuesta abierta con 4:00 hrs. para resolverlo y tendrá lugar únicamente en la ESFM-IPN.

Los resultados se publicarán en la página del concurso a partir del 09 de octubre de 2017.

Premiación: Se realizará el 10 de noviembre de 2017 a las 12:00 hrs. en el Auditorio "Víctor Flores Maldonado" de la ESFM-IPN.

- Todos los participantes recibirán diploma de participación.
- Los ganadores obtendrán diploma, medalla, libros y un premio en efectivo.
- Los premios se entregarán únicamente durante la Ceremonia de Premiación.

Inscripciones: Registrase del 3 de abril al 2 de junio de 2017, a través de la página http://www.esfm.ipn.mx/pierre_fermat/Paginas/Inicio.aspx.La inscripción es gratuita, sólo es posible llevarla a cabo en forma electrónica y no habrá prórroga al periodo definido.

CONCURSO NACIONAL DE MATEMATICAS "PIERRE FERMAT"

Una de las tareas de la Escuela Superior de Física y Matemáticas desde su fundación en 1961, es formar profesionales en matemáticas a nivel licenciatura y posgrado, capaz de integrarse al término de sus estudios en las áreas de Investigación, Desarrollo Tecnológico y Docencia.

Para ello es importante realizar actividades con los jóvenes que realizan estudios en el Nivel Medio, Medio Superior o Superior · conducentes a promocionar y estimular el gusto por las matemáticas, para que surjan de ahí en forma natural nuestros futuros estudiantes de ciencias.

Congruente con lo anterior la Escuela Superior de Física y Matemáticas, a partir de 1990 se ha dado a la tarea de organizar el Concurso Nacional de Matemáticas "PlERRE FERMAT".

Esperamos que este XXI Concurso despierte efectivamente el entusiasmo por las matemáticas en muchos jóvenes.

La Historia continua......

En 1637 Pierre Fermat escribió su famosa afirmación de que había descubierto una prueba de que la ecuación $x^n + y^n = z^n$ no tiene soluciones enteras (no triviales) para $n \geq 3$, pero... "... este margen es muy estrecho para contenerla".

En los siguientes 357 años se hicieron grandes esfuerzos para demostrar esta afirmación, hasta que, en 1994, Andew Wiles anunció que había demostrado afirmativamente el teorema enunciado por Fermat. Hoy en día, la historia siguió así......

Andrew Wiles, Premio Abel 2016
Miguel Ángel Morales Medina
15 de Marzo de 2016

El matemático británico Andrew Wiles, de la Universidad de Oxford, ha sido galardonado con el Premio Abel 2016 por la Norwegian Academy of Science and Letters "por su impresionante demostración del último teorema de Fermat mediante la conjetura de modularidad de curvas elípticas semiestables, iniciando una nueva era en la teoría de números". Wiles añade este premio al Premio Fermat (1995), al Premio Wolf en Matemáticas (1995/6), a la Royal Medal de la Royal Society (1996), a la IM Silver Plaque (1998) y al Premio Shaw (2005), entre otros.

La vida de Andrew Wiles ha estado unida desde siempre al último teorema de Fermat. Él mismo cuenta que cuando tenía 10 años encontró un libro en el que se hablaba del último teorema de Fermat, y que quedó intrigado al ver un problema que él podía entender pero que llevaba más de 300 años sin resolverse. Según él, desde ese mismo instante pensó que algún día tendría que encontrar la solución.

Y lo consiguió, aunque le costó dos intentos (en primera instancia, su demostración contenía un error que le costó un año solucionar) y varios años de trabajo dedicados exclusivamente a este problema. Pero lo dicho, lo consiguió. La resolución del UTF le reportó fama mundial, y no solamente dentro de la comunidad matemática. Wiles es uno de los pocos matemáticos (quizás el único) que ha tenido repercusión en medios de comunicación generalistas por la demostración de un teorema matemático (hay otro muy reciente, Grisha Perelman, pero fue noticia más por su carácter que por sus logros matemáticos).

Con este premio Abel, Wiles consigue por fin uno de los máximos galardones que puede recibir un matemático. El otro, la Medialla Fields, no la pudo conseguir, ya que cuando resolvió el error de su demostración ya sobrepasaba los 40 años (edad máxima requerida para recibir dicho premio). Mi más sincera enhorabuena.

Tomado de: Gaussianos (http://gaussianos.com/andrew-wiles-prem)

57 Olimpiada Internacional de Matemáticas
2016

DIA: 1

Problema 1. El triángulo *BCF* es rectángulo en *B*. Sea *A* el punto de la recta *CF* tal que *FA* = *FB* y *F* está entre *A* y *C*. Se elige el punto *D* de modo que *DA* = *DC* y *AC* es bisectriz del ángulo $\angle DAB$. Se elige el punto *E* de modo que *EA* = *ED* y *AD* es bisectriz del ángulo $\angle EAC$. Sea *M* el punto medio de *CF*. Sea *X* el punto tal que *AMXE* es un paralelogramo (con $AM \parallel EX$ y $AE \parallel MX$). Demostrar que las rectas *BD*, *FX*, y *ME* son concurrentes.

Problema 2. Hallar todos los enteros positivos *n* para los que en cada casilla de un tablero $n \times n$ se puede escribir una de las letras *I*, *M* y *O* de manera que:

- en cada fila y en cada columna, un tercio de las casillas tiene I, un tercio tiene M y un tercio tiene O; y
- en cualquier línea diagonal compuesta por un número de casillas divisible por 3, exactamente un tercio de las casillas tienen I, un tercio tiene M y un tercio tiene O.

Nota: Las filas y las columnas del tablero $n \times n$ se numeran desde 1 hasta n, en su orden natural. Así, cada casilla corresponde a un par de enteros positivos (i, j) con $1 \le i, j \le n.$. Para $n > 1$, el tablero tiene $4n-2$ líneas diagonales de dos tipos. Una línea diagonal del primer tipo se compone de todas las casillas (i, j) para las que $i + j$ es una constante, mientras que una línea diagonal del segundo tipo se compone de todas las casillas (i, j) para las que $i - j$ es una constante.

Problema 3. Sea $P = A_1 A_2 \cdots A_k$ un polígono convexo en el plano. Los vértices $A_1, A_2, \cdots, A_k$ tienen coordenadas enteras y se encuentran sobre una circunferencia. Sea *S* el área de *P*. Sea *n* un entero positivo impar tal que los cuadrados de las longitudes de los lados de *P* son todos números enteros divisibles por *n*. Demostrar que 2*S* es un entero divisible por *n*.

DIA: 2

Problema 4. Un conjunto de números enteros positivos se llama *fragante* si contiene al menos dos elementos, y cada uno de sus elementos tiene algún factor primo en común con al menos uno de los elementos restantes. Sea $P(n) = n^2 + n + 1$.
Determinar el menor número entero positivo *b* para el cual existe algún número entero no negativo *a* tal que el conjunto $\{P(a+1), P(a+2), \cdots, P(a+b)\}$ es fragante.

Problema 5. En la pizarra está escrita la ecuación

$$(x-1)(x-2)\cdots(x-2016) = (x-1)(x-2)\cdots(x-2016)$$

que tiene 2016 factores lineales en cada lado. Determinar el menor valor posible de k para el cual pueden borrarse exactamente k de estos 4032 factores lineales, de modo que al menos quede un factor en cada lado y la ecuación que resulte no tenga soluciones reales.

Problema 6. Se tienen $n > 2$ segmentos en el plano tales que cada par de segmentos se intersecan en un punto interior a ambos, y no hay tres segmentos que tengan un punto en común. Mafalda debe elegir uno de los extremos de cada segmento y colocar sobre él una rana mirando hacia el otro extremo. Luego silbará $n-1$ veces. En cada silbido, cada rana saltará inmediatamente hacia adelante hasta el siguiente punto de intersección sobre su segmento. Las ranas nunca cambian las direcciones de sus saltos. Mafalda quiere colocar las ranas de tal forma que nunca dos de ellas ocupen al mismo tiempo el mismo punto de intersección.

(a) Demostrar que si *n* es impar, Mafalda siempre puede lograr su objetivo.
(b) Demostrar que si *n* es par, Mafalda nunca logrará su objetivo.

10 de Noviembre de 2015
Primer Día

1. El número 125 se puede representar como suma de varios números naturales que son mayores que 1 y coprimos dos a dos. Encuentre el máximo número de sumandos que puede tener tal representación.

Nota: Dos números naturales son coprimos si su máximo común divisor es igual a 1.

2. Una recta r contiene los puntos A, B, C, D, en ese orden. Sea P un punto fuera de r tal que $\angle APB = \angle CPD$. Pruebe que la bisectriz de $\angle APD$ corta a r en un punto G tal que

$$\frac{1}{GA} + \frac{1}{GC} = \frac{1}{GB} + \frac{1}{GD}.$$

3. Sean α y β las raíces del polinomio $x^2 - qx + 1$, donde q es un número racional mayor que 2. Se define $s_1 = \alpha + \beta$, $t_1 = 1$ y para cada entero $n \geq 2$:

$$s_n = \alpha^n + \beta^n, \qquad t_n = s_{n-1} + 2s_{n-2} + \cdots + (n-1)s_1 + n.$$

Demuestre que, para todo n impar, t_n es el cuadrado de un número racional.

Duración de la prueba: 4 horas y 30 minutos.

Cada problema vale 7 puntos.

11 de Noviembre de 2015
Segundo Día

4. En el triángulo acutángulo ABC el punto D es el pie de la perpendicular desde A sobre el lado BC. Sea P un punto en el segmento AD. Las rectas BP y CP cortan a los lados AC y AB en E y F respectivamente. Sean J y K los pies de las perpendiculares desde E y F sobre AD respectivamente. Demuestre que

$$\frac{FK}{KD} = \frac{EJ}{JD}.$$

5. Determine todos los pares (a, b) de números enteros que verifican

$$(b^2 + 7(a-b))^2 = a^3 b.$$

6. Beto juega con su computadora al siguiente juego: inicialmente su computadora elige al azar 30 enteros de 1 a 2015, y Beto los escribe en un pizarrón (puede haber números repetidos); en cada paso, Beto elige un entero positivo k y algunos de los números escritos en el pizarrón, y le resta a cada uno de ellos el número k, con la condición de que los números resultantes sigan siendo no negativos. El objetivo del juego es lograr que en algún momento los 30 números resultantes sean iguales a 0, en cuyo caso el juego termina. Determine el menor número n tal que, independientemente de los números que inicialmente eligió su computadora, Beto puede terminar el juego en a lo sumo n pasos.

Duración de la prueba: 4 horas y 30 minutos.

Cada problema vale 7 puntos.

Concurso Nacional de Matemáticas Pierre Fermat
Vigésima Edición, 2016

Examen final para nivel secundaria

Problema 1

Pruebe que el número entero $14^{15}-1$ es divisible por 13 pero no por 13^2

Problema 2

Encuentre los valores de x que satisfagan la identidad algebraica:

$$\frac{\dfrac{xe^x}{(x-1)^2}+\dfrac{2x}{x+1}}{\dfrac{xe^x}{(x-1)^2}+1}=\frac{\dfrac{xe^x}{(x-1)^2}-1}{\dfrac{xe^x}{(x-1)^2}-\dfrac{2x}{x+1}}.$$

Problema 3

Sean x_1 y x_2 soluciones de una ecuación cuadrática $ax^2+bx+c=0$, donde $a<0$, y tales que se satisfacen lo siguiente:

(i) El punto medio entre x_1 y x_2 es cero.

(ii) La distancia entre x_1 y x_2 es el valor absoluto de la tercera parte del doble de a.

Pruebe lo siguiente:

a) b es igual a cero.
b) El cubo de a es el nónuplo del inverso aditivo de c.
c) Dé un ejemplo de una función cuadrática $y=ax^2+bx+c=0$, condiciones anteriores, y grafíquela.

Problema 4

Sea L una recta en el plano cartesiano cuya ecuación de recta está dada por $y=mx+b=0$, con $b>0$, y pasa por el punto (3, 4). Considere los puntos del plano $P=(0, b)$, $Q=(3, 4)$ y $R=(0, 0)$, los cuales forman un triángulo cuya área es de 27/8 unidades cuadradas. Obtenga lo siguiente:

a) El valor de m y de b.
b) La ecuación de la recta L en su forma simétrica.
c) El perímetro del triangulo ΔPQR.
d) La ecuación de la recta perpendicular L' a la recta L que pase por el punto P.

Problema 5

Sean a y b números reales tales que $a < b$. Pruebe lo siguiente:

a) Para cada n y m enteros positivos, se cumplen las desigualdades: $a < \dfrac{na + mb}{n + m} < b$.

b) Considere el segmento S de la recta numérica que tiene por extremos los números reales a y b. Al segmento S lo dividimos en 100 partes, cada una de la misma longitud. Los puntos de la partición los podemos enumerar de la siguiente forma $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{99} < t_{100} = b$. Demuestre que cada punto t_k, con $0 \le k \le 100$, es de la forma

$$\frac{na + mb}{n + m}$$

para ciertos n y m enteros positivos. Más precisamente, para cada $0 \le k \le 100$, ¿cómo deben ser n y m en función de k para que

$$t_k = \frac{na + mb}{n + m}?$$

Examen final para nivel medio superior

Problema 1

Considérese la ecuación cuadrática:

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0 \qquad (*)$$

con discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$. Utilizando la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, demostrar que la ecuación (*), tiene:

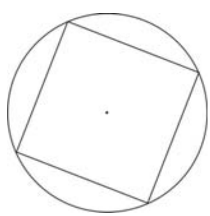
i) Dos raíces reales distintas si y sólo si $\Delta > 0$.

ii) Una raíz (doble) real si y sólo si $\Delta = 0$.

iii) No tiene raíces reales si y sólo si $\Delta < 0$.

Problema 2

Dada una circunferencia de radio R, realizar la construcción geométrica que permita localizar su centro



Demostrar además, que no es necesario localizar el centro de la circunferencia para inscribir y circunscribir en ella un cuadrado. Más aún, demostrar que basta con circunscribir a la circunferencia un cuadrado para localizar el centro de ella.

Problema 3

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función con regla de correspondencia:

$$f(x)=\frac{2x^2-7x+5}{x^2-5x+7}$$

Graficar totalmente la función *f*, indicando asíntotas, monotonía, concavidades, puntos extremos, puntos de inflexión y el codominio.

Problema 4

Resolver la integral indefinida siguiente:

$$\int\frac{\left(x^2+3x+1\right)dx}{\left(x^2+2x+2\right)^2}$$

Justifique ampliamente cada método y cambio de variable utilizado.

Problema 5

En el plano cartesiano, considérese el siguiente par de rectas:

ℓ_1 pasa por (1, 1) y tiene pendiente 1;

ℓ_2 pasa por (1, 1) y tiene pendiente -1.

Encontrar las ecuaciones de al menos dos hipérbolas conjugadas que tengan a las rectas ℓ_1 y ℓ_2 por asíntotas. ¿Cuál es la ecuación de la elipse auxiliar de estas dos hipérbolas?

Examen final para nivel superior

Problema 1

Considérese la sucesión de números reales $(a_n)_n$, definida por recurrencia como sigue:

$$a_1=3,\quad a_2=4;\ \ a_{n+1}=a_n+6a_{n-1},\, n>2.$$

Encontrar el término general de la sucesión. ¿Es la sucesión $(a_n)_n$ convergente? En caso de serlo, encontrar su límite.

Problema 2

Resolver totalmente la ecuación $\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(2x)=\dfrac{\sqrt{5}}{4}$. Dar la interpretación geométrica en base al decágono regular y al dodecágono regular inscritos en la circunferencia unitaria.

Problema 3

Demostrar que existe una matriz $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ que satisface la ecuación:

$A^2+2A+5I_n=\mathscr{O}_n$

si y solo si *n* es par.

Problema 4

Sea $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función con regla de correspondencia:

$$\varphi(\theta)=\begin{vmatrix}\cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 1\\ \cos\left(\theta+\dfrac{2\pi}{3}\right) & \operatorname{sen}\left(\theta+\dfrac{2\pi}{3}\right) & 1\\ \cos\left(\theta-\dfrac{2\pi}{3}\right) & \operatorname{sen}\left(\theta-\dfrac{2\pi}{3}\right) & 1\end{vmatrix}$$

Demostrar φ que es una función constante y encontrar su valor.

Problema 5

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función con regla de correspondencia:

$f(x)=|x-1|+\sqrt{|x^2-4x|}$

i) Exhibir los dominios de definición, de continuidad y de derivabilidad de *f*.
ii) Identificar los puntos críticos y singulares de *f*.
iii) Establecer el carácter de los puntos críticos y singulares de f.
iv) Trazar el grafico de *f*, indicando las concavidades, la monotonía, las asíntotas (horizontales, verticales u oblicuas). Obtener el codominio de *f* e indicar si las hubiere, las tangentes verticales de *f*.
v) Es la función *f*, Riemann-integrable en el intervalo [0, 4]? De ser así, ¿cuál es su valor? ¿Es la función *f*, uniformemente continua en su dominio de definición? Justifíquese.

20° Concurso Nacional de Matemáticas Pierre Fermat.

Edición 2016

Examen para nivel secundaria (Primera etapa).

Instrucciones: *No utilizar teléfono celular (éste deberá estar apagado), calculadora ó cualquier otro medio electrónico en el cual se puedan realizar operaciones aritméticas. No hay sugerencias a los problemas; cualquier pregunta que se haga deberá de estar relacionada con la redacción del problema y/o con alguna duda sobre el conocimiento propio de la matemática. Deberá de contestar los siguientes problemas de opción múltiple. Las respuestas del examen se asentarán en la hoja de respuestas anexa.*

Duración del examen: *Tres horas.*

Problema 1 Establezca cuál de las siguientes relaciones la correcta.

(a) $\varnothing \in \varnothing$ (b) $\varnothing \subseteq \varnothing$ (c) $2 \in \{1,\ \{2\}\}$ (d) $\{\pi,\ \square,\ x\} = \varnothing$

Problema 2 Si T es un conjunto, denotamos por $|T|$ a la cantidad de elementos que tiene el conjunto T. Por ejemplo, si $T = \{5,\ 8,\ -3,\ 0\}$, se tiene que $|T| = 4$. Considere los conjuntos $A = \{2016,\ 2017,\ 2018,\ 2019,\ 2020\}$, $B = \{\varnothing,\ \infty,\ \forall,\ \infty\}$ y $C = \{\Longleftrightarrow,\ \longrightarrow,\ \hookrightarrow,\ \rightarrowtail\}$ ¿Cuál de las siguientes relaciones es la incorrecta?

(a) $3 \leq |B| \leq |C| \leq |A| \leq 5$ (c) $3 \leq |B| \leq |C| \leq |A| < 5$

(b) $3 \leq |B| < |C| \leq |A| \leq 5$ (d) $3 \leq |B| \leq |C| < |A| \leq 5$

Problema 3 Si $A = \{1,\ -2,\ 3\}$, $B = \{1,\ 2,\ 3\}$ y $C = \{3,\ 5\}$, entonces ¿cuál de los siguientes conjuntos es igual al conjunto $(A \cup B) \cap (C \cap B)$?

(*a*) $\varnothing$ (*b*) $\{2,\ 3\}$ (*c*) $\{-2,\ 3\}$ (*d*) $\{3\}$

Problema 4 Elija la opción correcta en el cual el número real elegido se encuentre en el intervalo cerrad $[-3, -2]$.

(*a*) $-7/5$ (*b*) $\sqrt{3.2}$ (*c*) $3\sqrt{5}/2$ (*d*) $\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$

Problema 5 Sean a y b dos dos números reales positivos tales que su producto es 1 y el cociente d uno de ellos con el otro es 3. ¿Cuál de las siguientes relaciones la satisfacen a y b?

(*a*) $a^2 + b^2 = (\sqrt{30}/3)^2$

(*c*) $a^2 + b^2 = -(\sqrt{30}/3)^2$

(*b*) $a^2 + b^2 = -\sqrt{3}$

(*d*) $a^2 + b^2 = \sqrt{3}$

Problema 6 Considere x un número real el cual satisface que su valor absoluto $|x| = 1\frac{1}{7}$, y la distanci de x al punto -3, en la recta numérica, es $1\frac{6}{7}$. ¿Cuál debe de ser este número real x?

(*a*) $8/7$ (*b*) $-8/7$ (*c*) $13/7$ (*d*) $-13/7$

Problema 7 ¿Cuál es la notación simbólica que nos representa la diferencia

$$(1 + 2x + 3x^2 + \cdots) - (1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \cdots),$$

donde el primer sumando tiene 100 sumandos, y el segundo 101 sumandos?

(*a*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{50} 4nx^{2n-1} + 101x^{100}$

(*c*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{50} 4nx^{2n-1} - 101x^{100}$

(*b*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{51} 4nx^{2n-1} + 101x^{100}$

(*d*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{51} 4nx^{2n-1} - 101x^{100}$

Problema 8 ¿Cuál es la factorización de la expresión algebraica $a^{4/3}b^{2/5} - a^{2/3}b^{4/5}$?

(*a*) $(a^{2/3}b^{1/5} - a^{1/3}b^{2/5})(a^{2/3}b^{1/5} - a^{1/3}b^{2/5})$

(*c*) $(a^{1/5}b^{2/3} - a^{1/3}b^{2/5})(a^{1/5}b^{2/3} - a^{1/3}b^{2/5})$

(*b*) $(a^{2/3}b^{1/5} + a^{1/3}b^{2/5})(a^{2/3}b^{1/5} + a^{1/3}b^{2/5})$

(*d*) $(a^{2/3}b^{1/5} + a^{1/3}b^{2/5})(a^{2/3}b^{1/5} - a^{1/3}b^{2/5})$

Problema 9 ¿Cuál es la conversión de la cantidad $187^\circ\ 38'\ 25''$ a radianes?

(a) 1.042π (b) 1.142π (c) 1.242π (d) 1.342π

Problema 10 ¿Cuál es la cantidad en metros que corresponde a la suma $651\ km + 1003\ m + 358000\ mm$?

(a) $651361\ m$ (b) $652361\ m$ (c) $653361\ m$ (d) $654361\ m$

Problema 11 ¿Cuál es el radio de la circunferencia con centro en el origen donde se encuentra la solución (x, y) del sistema de ecuaciones lineales

$$x - 3y = 2$$
$$2x + y = -3\,?$$

(a) 2 (b) 3 (c) $\sqrt{2}$ (d) $\sqrt{3}$

Problema 12 Si α es una solución de la ecuación algebraica $x^2 + x + 1 = 0$, ¿cuál debe de ser la otra solución de dicha ecuación?

(a) $\alpha - 1$ (b) $-\alpha - 1$ (c) $-\alpha + 1$ (d) $\alpha + 1$

Problema 13 ¿Cuál es el valor de $\cos(\pi/6)$?

(a) $\sqrt{3}/2$ (b) $1/2$ (c) $-\sqrt{3}/2$ (d) $-1/2$

Problema 14 Un albañil tiene que comprar clavos galvanizados de $2\frac{1}{2}$ pulgada, los cuales tienen un costo de $\$57.50$ por kilo. Si el albañil cuenta con $\$72.00$ para su compra, ¿cuántos gramos de clavos galvanizados le deberán de dar?

(a) $1242.17\ gr$ (b) $1252.17\ gr$ (c) $1262.17\ gr$ (d) $1272.17\ gr$

Problema 15 El 16 de febrero de 2016, el Banco de México subió su tasa de interés de referencia de 3.25 a 3.75 por ciento, esto debido a la volatilidad de los mercados financieros internacionales. En el ámbito financiero, se dice que el Banco de México subió 50 puntos porcentuales dicha tasa de interés. Esta tasa de interés es la que cobra el Banco de México a otros bancos por prestarles dinero y, como se observa, lo más seguro es que este dinero vuelva ser prestado, a través de créditos, a las industrias, negocios, personas comunes, etc., que requieran de dicho dinero. Por lo tanto, un banco privado podría duplicar, triplicar, etc., el cobro de interés por el prestamo de estos dineros. Si un banco privado cobra el 17 por ciento anual de interés por prestamos del dinero, y un usuario solicita $\$100000.00$ de prestamo a pagar en un año, ¿cuál es la ganancia neta del banco?

(*a*) $12950.00 (*b*) $13050.00 (*c*) $13150.00 (*d*) $13250.00

Problema 16 ¿Cuál de las siguientes desigualdades se cumple para todo número real a?

(*a*) $a^4 - 6a^3 + 13a^2 - 12a - 4 \geq 0$
(*b*) $a^4 - 6a^3 + 13a^2 + 12a - 4 \geq 0$
(*c*) $a^4 - 6a^3 + 13a^2 - 12 + 4 \geq 0$
(*d*) $a^4 - 6a^3 - 13a^2 - 12a - 4 \geq 0$

Problema 17 Un tambo de lámina de 200 litros de capacidad se llena de agua a través de una manguera. El flujo de agua es constante, y después de un minuto el tambo tiene un volumen de $3/8$ partes de su capacidad. ¿Cuánto tiempo debe de pasar para que se llene de agua el tambo de lámina?

(*a*) 2 min 40 s (*b*) 2 min 43 s (*c*) 2 min 46 s (*d*) 2 min 49 s

Problema 18 Un salón de clases de segundo grado de secundaria está constituido de 33 estudiantes, de los cuales el 52 % son mujeres. De ellas, el 67 % desea estudiar una carrera en alguna universidad. Para conseguirlo, deberán de obtener de promedio final un 8 de calificación como mínimo en sus estudios de secundaria y bachillerato. Si por el momento el 51 % llevan 8 de calificación como mínimo, entonces ¿cuántas alumnas por el momento tienen que trabajar duro para obtener un promedio de 8 como mínimo de calificación?

(*a*) 3 (*b*) 4 (*c*) 5 (*d*) 6

Problema 19 Considere la función lineal $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 3x - 2$ para cada $x \in \mathbb{R}$. ¿Cómo debe de estar dada una función lineal $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que tenga las propiedades de que $g(1) = f(-1)$ y $g(-1) = f(0)$?

(*a*) $g(x) = \frac{3}{2}x - \frac{7}{2}$
(*c*) $g(x) = -\frac{3}{2}x + \frac{7}{2}$
(*b*) $g(x) = -\frac{3}{2}x - \frac{7}{2}$
(*d*) $g(x) = \frac{3}{2}x + \frac{7}{2}$

Problema 20 Elija la ecuación cuadrática que tenga por raíces a los números -2 y 3.

(*a*) $2016^{2016}x^2 + 2016^{2016}x + \left(2012\sqrt[2016]{6}\right)^{2016} = 0$

(*b*) $2016^{2016}x^2 - 2016^{2016}x + \left(2012\sqrt[2016]{6}\right)^{2016} = 0$

(c) $2016^{2016}x^2 - 2016^{2016}x - \left(2012\ \sqrt[2016]{6}\right)^{2016} = 0$

(d) $2016^{2016}x^2 + 2016^{2016}x - \left(2012\ \sqrt[2016]{6}\right)^{2016} = 0$

Problema 21 Considere la función cuadrática $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 3x^2 - x + 2$ para cada $x \in \mathbb{R}$. ¿Cuál es la cantidad de números reales x's que satisfacen que $f(x) = 26$ o $f(x) = 0$.

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

Problema 22 ¿Cuál es el valor de la pendiente de la recta que tiene por ecuación $2x - 5y - 7 = 0$?

(a) -2 (b) 2 (c) $-2/5$ (d) $2/5$

Problema 23 Un triángulo isósceles tiene una altura de 2 unidades, y satisface la propiedad de que la suma de las cantidades de su perímetro con el área es de 30. ¿Cuál es el promedio de la longitud de uno de sus lados con el de la base?

(a) 7.5

(b) 15

(c) 30

(d) Ninguno de los anteriores.

Problema 24 Un triángulo inscrito en un círculo de diámetro 5 unidades tiene área de 11.5 unidades cuadradas. ¿Cuál es el área de la región del círculo que queda fuera del triángulo?

(a) $8.135\ u^2$ (b) $8.136\ u^2$ (c) $8.137\ u^2$ (d) $8.138\ u^2$

Problema 25 Sean $P = (x_1, y_1)$ y $Q = (x_2, y_2)$ dos puntos en el plano cartesiano. Se define la **distancia entre P y Q** (la longitud del segmento que los une), denotada por $d(P, Q)$, a través de la fórmula

$$d(P,Q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Observe que $d(P, Q) = d(Q, P)$. Si un triángulo en el plano tiene por vértices los puntos $A = (0, 0)$, $B = (3, 0)$ y $C = (2, 1)$, entonces ¿cuál es su perímetro?

(a) $3 + \sqrt{2} + \sqrt{3}\ u$ (b) $2 + \sqrt{3} + \sqrt{5}\ u$ (c) $3 + \sqrt{2} + \sqrt{5}\ u$ (d) $2 + \sqrt{2} + \sqrt{5}\ u$

20° Concurso Nacional de Matemáticas Pierre Fermat.

Edición 2016

Examen para nivel medio superior (Primera etapa).

Instrucciones: *No utilizar teléfono celular (éste deberá estar apagado), calculadora ó cualquier otro medio electrónico en el cual se puedan realizar operaciones aritméticas. No hay sugerencias a los problemas; cualquier pregunta que se haga deberá de estar relacionada con la redacción del problema y/o con alguna duda sobre el conocimiento propio de la matemática. Deberá de contestar los siguientes problemas de opción múltiple. Las respuestas del examen se asentarán en la hoja de respuestas anexa.*

Duración del examen: *Tres horas.*

Problema 1 Considérense los conjuntos

$$\mathsf{D} = \{\text{números primos}\}, \qquad \mathsf{E} = \{1, 2, 3, \ldots, 20\};$$

$$\mathsf{F} = \{\text{números naturales con al menos uno de sus dígitos igual a } 3\}.$$

¿Cuál de los siguientes conjuntos es $\mathsf{D} \cap \mathsf{E} \cap \mathsf{F}$?

(a) $\{3, 13\}$ (b) $\varnothing$ (c) $\{13\}$ (d) $\{3\}$

Problema 2 En el plano cartesiano, sean E una elipse y H una hipérbola. Elija la combinación que considere correcta para el probable número de puntos que se encuentren en $\mathsf{E} \cap \mathsf{H}$.

(a) E$\cap$H consta de exactamente cuatro puntos.

(b) E $\cap$ H puede tener a lo más cuatro puntos.

(c) E $\cap$ H puede constar de 2 o de 4 puntos.

(d) Ninguna de las opciones anteriores.

Problema 3 Sea α un número real estrictamente positivo. Identificar el lugar geométrico de los puntos en el plano cartesiano representado por la ecuación $x^2 + y^2 = 2\alpha(x + y)$.

(a) La familia de circunferencias con centro en la recta $y = x$ y radio α.

(b) La familia de circunferencias con centro en la recta $y = 2\alpha x$ y radio 2α.

(c) La familia de circunferencias con centro en la parte positiva de la recta $y = x$ y tangentes a los ejes coordenados.

(d) Ninguna de las opciones anteriores.

Problema 4 Sean a y b dos números reales estrictamente positivos. ¿Cuál es la ecuación general de la elipse inscrita al rectángulo de vértices $(0,0)$, $(a,0)$, $(0,b)$ y (a,b)?

(a) $x^2 + y^2 + ax + by - \dfrac{1}{16}(a^2b^2 - 4a^2 - 4b^2) = 0.$

(b) $x^2 + y^2 - ax - by - \dfrac{1}{16}(a^2b^2 - 4a^2 - 4b^2) = 0.$

(c) $\dfrac{\left(x - \frac{1}{2}a\right)^2}{\frac{1}{4}a^2} + \dfrac{\left(y - \frac{1}{2}b\right)^2}{\frac{1}{4}b^2} = 1.$

(d) Ninguna de las opciones anteriores.

Problema 5 ¿Cuál es el valor del área de un triángulo equilátero de lado a?

(a) a^2 (b) $\dfrac{1}{3}a^2$ (c) $a^2\sqrt{3}$ (d) $3\sqrt{a}$

Problema 6 Utilizando un triángulo adecuado, encontrar explícitamente los valores de $\cos\dfrac{\pi}{6}$, $\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{6}$ y $\tan\dfrac{\pi}{6}$.

(a) $\cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$, $\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}\sqrt{3}$, $\tan\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{3}\sqrt{3}$.

(b) $\cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$, $\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}\sqrt{3}$, $\tan\dfrac{\pi}{6} = \sqrt{3}$.

(c) $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$, $\tan\frac{\pi}{6}=\frac{1}{3}\sqrt{3}$. (d) Ninguna de las opciones anteriores

Problema 7 Si a un rectángulo de lados x y 15, se le quita un cuadrado de lado x el valor del área de la figura resultante es 36. ¿Cuál es la ecuación que modela a este problema?

(a) $x^2-15x-36=0$ (b) $x^2-15x+36=0$

(c) $x^2+15x+36=0$ (d) Ninguna de las opciones anteriores.

Problema 8 Sean R_1 un rectángulo de lados $x+3$ y $x+5$ y R_2 un rectángulo de lados $x+7$ y $x+2$. Si ambos rectángulos tienen la misma área, Elija la opción que considere correcta.

(a) La ecuación que modela el problema es lineal y por tanto sólo existe exactamente un valor posible para x.

(b) La ecuación que modela el problema es cuadrática y existen dos valores posibles para x.

(c) La ecuación que modela el problema es cuadrática sin soluciones reales, por lo que el problema no tiene soluciones reales.

(d) Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

Problema 9 Sea Q un cuadrilátero cíclico. ¿La proposición: *"La suma de los ángulos opuestos del cuadrilátero* Q *es igual a la suma de dos rectos"* es equivalente a?:

(a) Los ángulos opuestos de Q son complementarios.

(b) Los lados opuestos de Q tienen la misma longitud.

(c) Los ángulos opuestos de Q son suplementarios.

(d) Ninguna de las proposiciones anteriores.

Problema 10 Considérese la siguiente proposición: *"Por tres puntos distintos del plano cartesiano pasa una y sólo una circunferencia."* Elija la opción que considere correcta.

(a) La proposición es falsa.

(b) La proposición es verdadera sólo si los puntos no son colineales.

(c) La proposición es verdadera.

(d) Las tres opciones anteriores son falsas.

Problema 11 Utilizando los valores del seno y del coseno de los ángulos de 45° y de 30°, encuentre el valor explícito de $\operatorname{sen} 15°$.

(a) $\operatorname{sen} 15° = \dfrac{(\sqrt{3}+1)\sqrt{2}}{4}$

(b) $\operatorname{sen} 15° = \dfrac{(\sqrt{2}-1)\sqrt{3}}{4}$

(c) $\operatorname{sen} 15° = \dfrac{(\sqrt{3}-1)\sqrt{2}}{4}$

(d) Ninguna de las tres opciones anteriores.

Problema 12 Sean $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ y $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ las ecuaciones cartesianas de dos rectas distintas en el plano. Si

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0,$$

entonces elija la opción que considere correcta.

(a) Las rectas son perpendiculares.

(b) Ambas ecuaciones representan a la misma recta.

(c) Las rectas son paralelas.

(d) Ninguna de las tres opciones es verdadera.

Problema 13 Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$. Elija la proposición que considere correcta.

(a) La función f es continua y derivable en todo su dominio, el cual es $\mathbb{R} - \{0\}$.

(b) La función f es continua y derivable en $\mathbb{R}$.

(c) La función f es discontinua únicamente en 0.

(d) Ninguna de las tres opciones anteriores es verdadera.

Problema 14 Un estudiante se compromete con el tiránico profesor Sabino a presentarle diariamente la solución de 5 problemas. El estudiante recibe \$7.50 por cada solución correcta y por el contrario, debe abonar \$6.00 al susodicho profesor por cada problema no resuelto o por cada solución incorrecta. Al termino de 15 días, el estudiante tiene un saldo a su favor (muy doloroso para el profesor Sabino) de \$225, ¿Cuántos problemas resolvió correctamente el estudiante?

(a) 37 problemas (b) 50 problemas (c) 18 problemas (d) 11 problemas

Problema 15 Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función y a un punto de $\mathbb{R}$ en el cual la función es derivable. Elija la proposición que considere verdadera.

(a) La función f es discontinua en a.

(b) La función f tiene recta tangente en el punto $(a, f(a))$ y su ecuación es:

$$y - f(a) + f'(a)(x - a) = 0.$$

(c) La función f tiene recta tangente en el punto $(a, f(a))$ y su ecuación es:

$$y - f(a) - f'(a)(x - a) = 0.$$

(d) Ninguna de las opciones anteriores es verdadera.

Problema 16 ¿Para aproximar mediante diferenciales el número $\sqrt{4.15}$, qué función, qué punto y qué diferencial utilizaría?

(a) $f(x) = x^2,\ a = 2,\ dx = 0.15$

(b) $f(x) = \sqrt{x},\ a = 4.1,\ dx = 0.05$

(c) $f(x) = \sqrt{x},\ a = 4,\ dx = 0.15$

(d) Ninguna de las opciones anteriores.

Problema 17 ¿Cuál es la aproximación mediante diferenciales del número $\sqrt{4.15}$?

(a) $\dfrac{815}{400}$

(b) 2.0375

(c) 2.03715

(d) Ninguna de las opciones anteriores.

Problema 18 ¿Para qué subconjunto de $\mathbb{R}$ está definida la función $f(x) = \sqrt{3x^2 - 12}$?

(a) $[2, +\infty)$

(b) $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

(c) $\varnothing$

(d) Ninguna de las opciones anteriores

Problema 19 Sean a un número real mayor o igual que 0 y n cualquier número natural. ¿Cuál es el valor de $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^n - a^n}{x-a}$?

(*a*) na^{n-1}

(*b*) $+\infty$

(*c*) 0

(*d*) Ninguna de las opciones anteriores.

Problema 20 Considérese la función $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 1 \\ \dfrac{3-x}{2} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$. Calcular $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

(*a*) El límite no existe

(*b*) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0$

(*c*) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1$

(*d*) Ninguna de las opciones anteriores.

Problema 21 Determinar el número y la naturaleza de los puntos críticos de la función dada por $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2$.

(*a*) 3 puntos críticos: dos máximos y un mínimo.

(*b*) 3 puntos críticos: dos mínimos y un máximo.

(*c*) 3 puntos críticos: un máximo, un mínimo y un punto de inflexión.

(*d*) Ninguna de las opciones anteriores.

Problema 22 Considérese la función dada por $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Elija la proposición que considere correcta.

(*a*) La función f tiene un punto crítico en $x = 0$.

(*b*) La función f no tiene puntos críticos, pero tiene un punto de inflexión en $x = 0$.

(*c*) La función f es siempre continua y decreciente.

(*d*) Ninguna de las proposiciones anteriores es verdadera.

Problema 23 ¿Cuál es la solución de la integral indefinida $\displaystyle\int \frac{x-1}{x+1}\,dx$?

(*a*) $x + 4\ln(x+1) + c$

(*b*) $2x - \ln(x+1)^4 + c$

(*c*) $x - 2\ln(x+1) + c$

(*d*) Ninguna de las opciones anteriores.

Problema 24 ¿Cuál es la solución de la integral indefinida $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 - 9x + 22}$?

(a) $\ln\left(\dfrac{x-11}{x+2}\right)^{13} + c$

(b) $\dfrac{1}{13}\ln\left(\dfrac{x-11}{x+2}\right) + c$

(c) $\dfrac{1}{13}\ln\left(\dfrac{x-2}{x+11}\right) + c$

(d) Ninguna de las opciones anteriores.

Problema 25 Si la integral definida, expresa el valor de un área y las áreas nunca son negativas, ¿entonces por qué $\displaystyle\int_{-2}^{1} x^3 dx = -\frac{15}{4}$?

(a) Porque al dividir adecuadamente el intervalo de integración, la integral resulta ser una suma algebraica de números positivos.

(b) Porque las funciones negativas tienen integral negativa.

(c) Porque en este caso, la función es impar.

(d) Ninguna de las opciones anteriores es verdadera.

20° Concurso Nacional de Matemáticas Pierre Fermat.

Edición 2016

Examen para nivel superior (Primera etapa).

Instrucciones: *No utilizar teléfono celular (éste deberá estar apagado), calculadora ó cualquier otro medio electrónico en el cual se puedan realizar operaciones aritméticas. No hay sugerencias a los problemas; cualquier pregunta que se haga deberá de estar relacionada con la redacción del problema y/o con alguna duda sobre el conocimiento propio de la matemática. Deberá de contestar los siguientes problemas de opción múltiple. Las respuestas del examen se asentarán en la hoja de respuestas anexa.*

Duración del examen: *Tres horas.*

Problema 1 Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función y $a \in \mathbb{R}$. Se dice que f es **diferenciable** en a si y sólo si:

(a) f es continua en a y existe $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

(b) Existe una transformación lineal afín $\mathsf{L} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\mathsf{L}(a) = f(a)$ y para todo $\varepsilon > 0$, existe una vecindad $\mathcal{V}$ de a tal que $|f(x) - \mathsf{L}(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in \mathcal{V}$.

(c) f es continua en a.

(d) Ninguna de las opciones anteriores es verdadera.

Problema 2 Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = x^2 - 10x + 28$. ¿Es la función f diferenciable en $x = 3$? De ser así, ¿cuál es su función diferencial en $x = 3$?

(a) La función f no es diferenciable en $x = 3$.

(b) La función f es diferenciable en $x = 3$ y su función diferencial en $x = 3$ es $df(x) = -4dx + 13$.

(c) La función f es diferenciable en $x = 3$ y su función diferencial en $x = 3$ es $df(x) = -4dx$.

(d) Ninguna de la opciones anteriores.

Problema 3 ¿Cuántos puntos **singulares** tiene la función $f(x) = x + \frac{3}{2}x^{2/3}$? ¿De qué naturaleza son?

(a) La función no tiene puntos singulares.

(b) La función f tiene dos puntos singulares: un mínimo y un máximo globales.

(c) La función f tiene dos puntos singulares: un mínimo y un máximo locales.

(d) La función f tiene dos puntos singulares: un mínimo global y un máximo local.

Problema 4 ¿Cuántas asíntotas tiene la función $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$? ¿De qué tipo son éstas asíntotas?

(a) La función f no tiene asíntotas.

(b) La función f tiene cuatro asíntotas: dos verticales y dos horizontales.

(c) La función f tiene solamente dos asíntotas verticales.

(d) La función f tiene cuatro asíntotas: dos verticales y dos oblicuas .

Problema 5 Calcular $\lim\limits_{x \to \frac{3}{2}} \dfrac{4x^5 - x^3 - 2x^2 + 3x - 27}{2x^4 + x^3 - x - 12}$.

(a) El límite no existe.

(b) $\dfrac{330}{131}$

(c) $+\infty$

(d) Ninguna de las opciones anteriores.

Problema 6 Calcular:

$$\lim_{x \to -1} \left(\left(\frac{2x^3 - 3x^2 - 4x + 1}{x^4 + 2x + 1} \right)^{\dfrac{x^3 - 4x^2 + x + 6}{x^2 - 2x - 3}} \right).$$

(a) $-\dfrac{1}{64}$

(b) $+\infty$

(c) $\dfrac{1}{67}$

(d) El límite no existe.

Problema 7 Calcular $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x - \sqrt{x}} - \sqrt{x} \right)$.

(a) El límite no existe.

(b) $-\frac{1}{2}$

(c) 2

(d) Ninguna de las opciones anteriores.

Problema 8 Considérese la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 - 6x + 8 & \text{si } 1 < x \end{cases}$. De las proposiciones siguientes elija la que crea verdadera.

(a) La función f está definida y es continua en $\mathbb{R}$.

(b) La función f está definida y es continua en $\mathbb{R} - \{1\}$.

(c) La función f está definida y es continua en $\mathbb{R}$ excepto en 1 en donde, tiene una discontinuidad esencial.

(d) Ninguna de las proposiciones anteriores es verdadera.

Problema 9 Considérese la función $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $\varphi(x) = x^{2/3}$ ¿Cuál de las siguientes proposiciones es verdadera?

(a) La función φ es continua y derivable en $\mathbb{R}$.

(b) La función φ es continua y derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$.

(c) La función φ es continua en $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$. Además, en $x = 0$ la función φ tiene un mínimo global.

(d) Todas las proposiciones anteriores son falsas.

Problema 10 Considérese la función $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$\psi(x, y) = \begin{cases} \|(x, y)\|^2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{\|(x, y)\|} \right) & \text{si } \|(x, y)\| \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

¿Cuál de las siguientes proposiciones es verdadera?

(a) La función ψ es continua en $\mathbb{R}^2$ y diferenciable en todo punto de $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$.

(*b*) La función ψ es continua y diferenciable en todo punto de $\mathbb{R}^2$.

(*c*) La función ψ es continua y diferenciable en todo punto de $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

(*d*) Todas las proposiciones anteriores son falsas.

Problema 11 Sea $\mathsf{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una transformación lineal. ¿Cuál de las siguientes proposiciones es verdadera?

(*a*) L es continua, uniformemente continua y diferenciable en $\mathbb{R}^n$.

(*b*) L es diferenciable y por tanto continua en todo punto de $\mathbb{R}^n$ y nada se puede afirmar sobre la continuidad uniforme de L.

(*c*) L es diferenciable en $\mathbb{R}^n$ con función diferencial 0.

(*d*) Todas las proposiciones anteriores son falsas.

Problema 12 Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua en (a,b). ¿Cuáles son las condiciones necesarias y suficientes para que f sea continua en $[a,b]$?

(*a*) Que f sea acotada en (a,b).

(*b*) Que f sea acotada en (a,b) y existan los límites $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$.

(*c*) Que los límites $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ existan, sean finitos y que además $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$ y $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = f(b)$.

(*d*) Todas las proposiciones anteriores son falsas.

Problema 13 ¿Es convergente la integral impropia $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$? En caso de serlo, ¿a dónde converge?

(*a*) La integral no es convergente.

(*b*) La integral es divergente a $+\infty$.

(*c*) La integral es convergente y converge a 2.

(*d*) Ninguna de la opciones anteriores es correcta.

Problema 14 Sean $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función dada por $f(x, y) = e^{y^2}$ y D el triángulo de vértices $(0,0)$, $(0,1)$, $(2,1)$. ¿Es La función f integrable en el triángulo D? En caso de serlo, ¿cuál es el valor de la integral de f en D?

(a) La función f no es integrable en D.

(b) La función es integrable en D y su integral en D vale $e - \frac{1}{2}$.

(c) La función es integrable en D y su integral en D vale $e - 1$.

(d) Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

Problema 15 Sea $\mathsf{E} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 + 5y^2 - 5x^2 - xy^2 - 4x + 20 = 0\}$. ¿Cuál es el lugar geométrico de $\mathbb{R}^2$ que representa el conjunto E?

(a) El conjunto vacío.

(b) La recta $y = 5$ y la elipse $x^2 - 4y^2 = 1$.

(c) La recta $x = 5$ y la circunferencia de radio 2 con centro en el origen.

(d) Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

Problema 16 Resolver la integral indefinida $\displaystyle\int \frac{(21x^6 - 2)\, dx}{6x^7 - 4x + 1}$.

(a) El integrando no tiene primitiva.

(b) $\dfrac{1}{2} \ln(6x^7 - 4x + 1) + c.$

(c) $6x^7 - 4x + 1 + 2\ln(6x^7 - 4x + 1) + c.$

(d) Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

Problema 17 Considérese la matriz real $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 9 & -3 & 0 \\ -3 & 12 & -3 \\ 0 & -3 & 9 \end{pmatrix}$. ¿Es la matriz A diagonalizable? En caso de serlo, encontrar su forma diagonal.

(a) La matriz A no es diagonalizable.

(*b*) La matriz A es diagonalizable con forma diagonal $\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

(*c*) La matriz A es diagonalizable con forma diagonal $\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{pmatrix}$.

(*d*) Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

Problema 18 Calcular $\lim\limits_{x \to +\infty} (\operatorname{sen} x)^{\tan x}$.

(*a*) No existe. (*b*) $+\infty$ (*c*) 1 (*d*) 0.

Problema 19 Sea A una matriz real de tamaño 3×3. Supóngase que A tiene exactamente dos valores propios reales λ_1 y λ_2. ¿Si λ_1 es el valor propio de multiplicidad 2 de A, bajo qué condiciones es A una matriz diagonalizable? y en tal caso, ¿cuál es la forma diagonal de A?

(*a*) A nunca será diagonalizable.

(*b*) A será diagonalizable si y sólo si la dimensión del subespacio propio de $\mathbb{R}^3$ asociado λ_1 es 2 y su forma diagonal es $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.

(*c*) Si la matriz no es simétrica, la pregunta carece de sentido.

(*d*) Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

Problema 20 Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función y $a \in \mathbb{R}$. Se dice que la función f es <u>**analítica**</u> en a si y sólo si:

(*a*) Existe una vecindad de a en la cual la función f se representa mediante una serie de potencias.

(*b*) Existe una vecindad de a en la cual la función f se representa mediante una serie de potencias convergente de manera tal, que la suma de ésta serie es la función f.

(*c*) Existe una vecindad de a en la cual la función f se representa mediante una serie de potencias convergente.

(d) Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

Problema 21 ¿Es convergente la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$? De ser convergente, ¿cuál es su suma?

(a) La serie es convergente y su suma es 2.

(b) La serie es divergente.

(c) La serie es convergente y su suma es 1

(d) Las tres opciones anteriores son falsas.

Problema 22 ¿En qué base a se tiene que $\log_a(161051) = 5$?

(a) $a = 10$ (b) $a = 11$ (c) $a = -6$ (d) No existe tal a.

Problema 23 ¿Tiene la ecuación $\sqrt{3 - \sqrt{3 + \sqrt{x - \sqrt{2x+1}}}} = 1$ soluciones reales? De ser así, ¿cuáles son?

(a) No existen soluciones reales.

(b) 0 y 4 son las únicas soluciones reales

(c) 4 es la única solución real

(d) Las tres opciones anteriores son falsas.

Problema 24 ¿A qué lugar geométrico en el plano complejo representa la ecuación $|z - 2i| \leq 3$?

(a) $\varnothing$

(b) Un circulo de centro $2i$ y radio 3.

(c) Una circunferencia de centro $2i$ y radio 3.

(d) Las tres opciones anteriores son falsas.

Problema 25 Encontrar todas las raćes del polinomio $x^4 - x^2 - 12$.

(a) 2 y -2

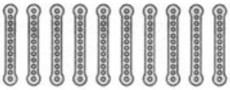
(b) $2 - 3i$, $2 + 3i$, $3 - 2i$, $3 + 2i$

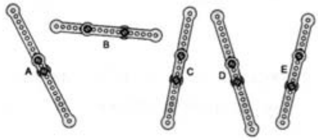
(c) $2, -2, 3i, -3i$

(d) Las tres opciones anteriores son falsas.

Examen Canguro Matemático 2015
Nivel Benjamín

1. Eric tiene 10 tiras de metal iguales. Atornilló de dos en dos como se muestra. ¿Cual es la tira más larga?



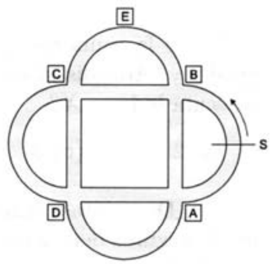


(a) A (b) B (c) C (d) D (e) E

2. Pepe tiene 4 juguetes: un carro, un muñeco, una pelota y un barco. Quiere ponerlos en línea en un estante. El barco debe estar junto al carro y también el muñeco debe quedar junto al carro. ¿De cuántas maneras puede acomodar los juguetes?

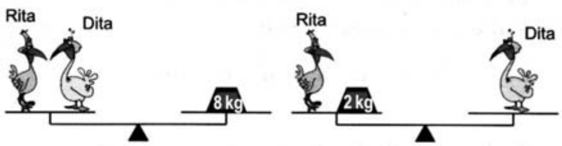
(a) 2 (b) 4 (c) 5 (d) 6 (e) 8

3. Pedro va en su bicicleta en un parque que tiene la forma como se ve en la figura. Empieza en el punto S en la dirección de la flecha. En el primer cruce da vuelta a la derecha; en el siguiente cruce da vuelta a la izquierda, en el siguiente a la derecha y en el siguiente a la izquierda. ¿Por cuál de las señales no pasa?



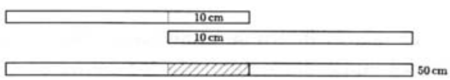
(a) A (b) B (c) C (d) D (e) E

4. ¿Cuánto pesa Dita?



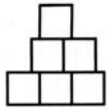
(a) 2 Kg (b) 3 Kg (c) 4 Kg (d) 5 Kg (e) 6 Kg

5. Azucena tiene 4 tiras de madera de la misma longitud. Pega dos de ellas con con un traslape de 10 cm y así obtiene una tira de 50 cm de longitud. Con las otras dos quiere hacer una tira de 56 cm de longitud. ¿Cuánto debe medir el traslape?



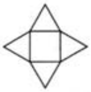
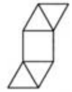
(a) 4 cm (b) 6 cm (c) 8 cm (d) 10 cm (e) 12 cm

6. La figura que se muestra consta de 6 cuadrados de lado 1. ¿Cuál es su perímetro?



(a) 9 (b) 10 (c) 11 (d) 12 (e) 13

7. Tomás va a recortar por la orilla las figuras que se muestran y va a doblar por las líneas. ¿Con cuál de las figuras no puede obtener una pirámide?

(a)  (b)  (c)  (d)  (e) 

8. El área de un rectángulo es $12\,\text{cm}^2$. Las longitudes de sus lados son números enteros. ¿Cuál de los siguientes puede ser el perímetro del rectángulo?

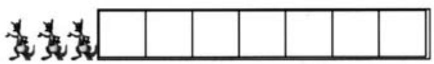
(a) 20 cm (b) 26 cm (c) 28 cm (d) 32 cm (e) 48 cm

9. En la suma que se muestra, letras iguales representan dígitos iguales y letras distintas representan dígitos distintos. ¿Qué dígito representa la letra X?

$$\begin{array}{ccc} & & X \\ + & & X \\ + & Y & Y \\ \hline Z & Z & Z \end{array}$$

(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 5 (e) 6

10. ¿De cuántas maneras se pueden colocar los 3 canguros dentro de tres cuadritos distintos, de manera que no haya dos canguros en cuadrados que compartan lado?

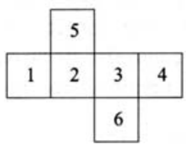


(a) 7 (b) 8 (c) 9 (d) 10 (e) 11

11. Jimena dibujó un triángulo con longitudes 6, 10 y 11. Carlos dibujó un triángulo equilátero con el mismo perímetro. ¿Cuánto mide cada uno de los lados del triángulo que dibujó Carlos?

(a) 18 (b) 11 (c) 10 (d) 9 (e) 6

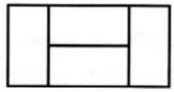
12. En la figura se muestra un cubo de cartón, desdoblado. Hansel sumó correctamente los números en las caras opuestas del cubo. ¿Cuáles son los resultados que obtuvo Hansel?



(a) 4, 6, 11 (b) 5, 7, 9 (c) 5, 6, 10 (d) 5, 8, 8 (e) 4, 5, 12

Examen Canguro Matemático 2015
Nivel Cadete

1. Utilizando cuatro rectángulos idénticos se forma un rectángulo mayor, como se muestra en la figura. La longitud del lado más pequeño del rectángulo mayor es 10 cm. ¿Cuál es la longitud del otro lado del rectángulo mayor?



(a) 10 cm (b) 20 cm (c) 30 cm (d) 40 cm (e) 50 cm

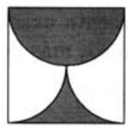
2. Sofía tiene un libro nuevo de 239 páginas. Planea leer 3 páginas cada día entre semana y 5 páginas cada sábado y cada domingo. Va a empezar un domingo. ¿Qué día de la semana terminará de leer todo el libro?

(a) sábado (b) domingo (c) lunes (d) martes (e) miércoles

3. Tres hermanas, Fernanda, Juana y María José, compraron una bolsa de 30 galletas. Cada una se quedó con 10 galletas. Sin embargo, Fernanda pagó 8 pesos, Jimena 5 y María José 2. Si se hubieran repartido las galletas proporcionalmente al precio que cada una pagó, ¿cuántas galletas le habrían tocado a Fernanda?

(a) 12 (b) 13 (c) 14 (d) 15 (e) 16

4. Dentro de un cuadrado de lado 2 se trazaron semicírculos (con 3 de los lados como diámetros) y se sombreó como muestra la figura. ¿Cuál es el área?

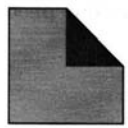


(a) $\frac{\pi}{2}$ (b) π (c) 2π (d) 1 (e) 2

5. Max le preguntó a sus cinco amigos que cuántos de ellos habían estudiado para el examen de Matemáticas. Octavio dijo que ninguno. Gabriela dijo que solamente uno. Sunya dijo que exactamente dos. Marco dijo que exactamente tres y Claudia dijo que exactamente cuatro. Max sabe que los que no estudiaron están diciendo mentiras, y que aquellos que estudiaron están diciendo la verdad. ¿Cuántos de los amigos de Max estudiaron para el examen?

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3 (e) 4

6. Un cuadrado de papel se dobló hasta colocar una de sus esquinas exactamente en el centro, como se muestra en la figura. Con el doblez se formó un pentágono irregular. Las áreas del pentágono y del cuadrado son enteros consecutivos. ¿Cuál es el área del cuadrado?

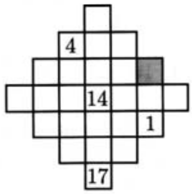


(a) 2 (b) 4 (c) 8 (d) 16 (e) 32

7. Monserrat sumó las longitudes de tres lados de un rectángulo y obtuvo 44 cm. Isabela también sumó las lontigudes tres lados del mismo rectángulo, pero ella obtuvo 40 cm. ¿Cuál es el perímetro del rectángulo?

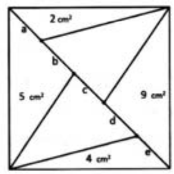
(a) 42 cm (b) 56 cm (c) 64 cm (d) 84 cm (e) 112 cm

8. Ana Paula tiene que poner números enteros en los cuadrados de la figura de tal manera que por cada 3 cuadrados consecutivos en la misma línea (tanto horizontal como vertical) el número que quede en el cuadrado de enmedio sea el promedio de sus dos vecinos. Algunos números ya se escribieron, ¿qué número debe escribir en el cuadrado sombreado?



(a) 9 (b) 11 (c) 15 (d) 19 (e) 22

9. En un cuadrado con $30\,\text{cm}^2$ de área se dibujó una diagonal. Posteriormente, se dividió en 6 triángulos, como se muestra la figura, en donde también se han marcado las áreas de algunos de esos triángulos. ¿Cuál de los segmentos a, b, c, d y e de la diagonal es el más largo?



(a) a (b) b (c) c (d) d (e) e

10. En un grupo de canguros la suma de los pesos de los dos canguros más livianos representa exactamente el 25 % del peso total del grupo. La suma de los pesos de los tres canguros más pesados representa el 60 % del peso total. ¿Cuántos canguros hay en el grupo?

(a) 6 (b) 7 (c) 8 (d) 15 (e) 20

11. Hay cinco puntos en una línea. Diego mide las distancias entre cada dos de ellos y obtiene, en orden ascendente, las medidas $2, 5, 6, 8, 9, k, 15, 17, 20$ y 22, todas en centímetros. ¿Cuál es el valor de k?

(a) 10 cm (b) 11 cm (c) 12 cm (d) 13 cm (e) 14 cm

12. Juan Pablo tiene tres dispensadores de dulces que dan un dulce a la vez. No puede ver lo que tienen adentro, pero sabe que uno contiene dulces de cereza, otro está lleno con dulces de limón y otro tiene de los dos sabores. También sabe que todas las etiquetas de los dispensadores se cambiaron entre sí y quedaron equivocados. ¿Cuál es la menor cantidad de dulces que puede sacar para reetiquetar los dispensadores correctamente?

(a) 1 (b) 2 (c) 4 (d) 6 (e) 9

Examen Canguro Matemático 2015
Nivel Estudiante

1. Andrea nació en 1997. Carlota, su hermana menor, nació en 2001. ¿Qué puede decirse con seguridad de la diferencia de edades entre las dos hermanas?

(a) Es menos de 4 años. (b) Es al menos 4 años. (c) Es exactamente 4 años. (d) Es más de 4 años (e) No es menos de 3 años.

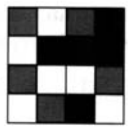
2. ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $2^{2x} = 4^{x+1}$?

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3 (e) una infinidad

3. Diana dibujó una tabla que representa la cantidad de árboles de 4 especies distintas que observó durante una excursión. ¿Cómo sería la gráfica circular que mejor representaría la misma proporción de las 4 especies de árboles?

(a)  (b)  (c)  (d)  (e) 

4. Los 16 cuadritos de una cuadrícula de 4×4 se deben pintar con tres colores. Ya están pintados como se muestra. ¿Al menos cuántos cuadros deben repintarse para que cuadros que compartan lado tengan diferente color?



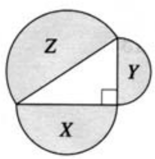
(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 5 (e) 6

5. ¿Cuál es el resultado de la siguiente operación?

$$\sqrt{(2015 + 2015) + (2015 - 2015) + (2015 \cdot 2015) + (2015 : 2015)}$$

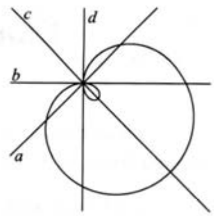
(a) $\sqrt{2015}$ (b) 2015 (c) 2016 (d) 2017 (e) 4030

6. Tres semicírculos tienen por diámetros a los lados de un triángulo rectángulo. Sus áreas son $X\,\text{cm}^2$, $Y\,\text{cm}^2$ y $Z\,\text{cm}^2$, como se muestra en la figura. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones seguro es verdadera?



(a) $X + Y < Z$ (b) $\sqrt{X} + \sqrt{Y} = \sqrt{Z}$ (c) $X + Y = Z$ (d) $X^2 + Y^2 = Z^2$ (e) $X^2 + Y^2 = Z$

7. La ecuación que describe la curva de la figura es



$$(x^2 + y^2 - 2x)^2 = 2(x^2 + y^2).$$

¿Qué recta representa al eje y?

(a) la recta a (b) la recta b (c) la recta c
(d) la recta d (e) ninguna de a, b, c o d

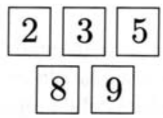
8. Si se leen las afirmaciones en las opciones de izquierda a derecha, ¿cuál es la primera que es cierta?

(a) "(c) es cierta" (b) "(a) es cierta" (c) "(e) es falsa" (d) "(b) es falsa" (e) "$1 + 1 = 2$"

9. En la figura hay 3 círculos concéntricos y dos diámetros perpendiculares. Si las tres áreas sombreadas son iguales y el radio del círculo menor es 1, ¿cuál es el producto de los tres radios?

(a) $\sqrt{6}$ (b) 3 (c) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ (d) $2\sqrt{2}$ (e) 6

10. Hay 10 tarjetas numeradas del 1 al 10. En la figura se muestran 5 de las tarjetas. Las restantes se quieren aparear con las que se muestran, de manera que las sumas de las parejas sean 9, 10, 11, 12 y 13 (sin repetir). ¿De cuántas maneras es posible hacer esto?



(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3 (e) 4

11. ¿En cuántas regiones dividen al plano el eje x y las gráficas de las funciones definidas por $f(x) = 2 - x^2$ y $g(x) = x^2 - 1$?

(a) 7 (b) 8 (c) 9 (d) 10 (e) 11

12. Una agencia vendedora de automóviles compró 2 coches. Vendió el primero por 40 % más de lo que lo compró, y vendió el segundo por 60 % más de lo que lo compró. La cantidad que recibió en total por los dos coches es 54 % más de lo que pagó por los dos. ¿Cuál es la razón de las cantidades que pagó entre el primer coche y el segundo?

(a) $\frac{10}{13}$ (b) $\frac{20}{27}$ (c) $\frac{3}{7}$ (d) $\frac{7}{12}$ (e) $\frac{2}{3}$

SEDES

Estado de Guanajuato
Centro De Investigación En Matemáticas, A.C. CIMAT
Estado de México
Colegio de Estudios Científicos Y Tecnológicos del Estado de México Plantel Jilotepec.
Colegio Panamericano Texcoco, Secundaria y Preparatoria S. C.
Escuela Preparatoria Regional de Zumpango, A.C.
Centro de Apoyo a Estudiantes MATH & ENGLISH, “El gusto por Aprender”
Estado de Morelos
Colegio El Peñón
Colegio Juana de Arco
Estado de Tlaxcala
Departamento de Escuela Secundaria General
Estado de Hidalgo
Unidad Profesional Interdisciplinaria de Ingeniería Campus Hidalgo (UPIIH-IPN)
Estado de Puebla
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Instituto Tecnológico Superior de Zacapoaxtla
Estado de Nuevo León
Facultad De Ciencias Físico- Matemáticas, de la Universidad Autónoma de Nuevo León
Estado de Veracruz
Facultad de Matemáticas, Universidad Veracruzana
Instituto Tecnológico Superior de Perote
Estado de Oaxaca
Instituto Tecnológico de Oaxaca
Universidad del Mar (Campus Puerto Escondido)
Universidad del Papaloapan
Universidad Tecnológica de la Mixteca
Estado de Yucatán
Universidad Autónoma de Yucatán
Estado de Guerrero
Instituto Tecnológico de Iguala
Ciudad de México
Escuela Superior de Física y Matemáticas del IPN

Confirmadas al 07 de abril de 2017

COMITE ORGANIZADOR

Presidente

Miguel Tufiño Velazquez

Coordinación general

Erick Lee Guzmán

Fabio J. Dávila Ojeda

Elaboración de problemas y apoyo técnico

Santiago Marcos Zepeda Martínez
José Oscar González Cervantes
José Humberto Ávila Sandoval
Raciel Vázquez Aguilar
Eliseo Sarmiento Rosales
Alejandro Bribiesca Sánchez
Pablo Lam Estrada
Abelardo Santaella Quintas
Félix Fernández Méndez
Virginia Garrido Adame
Juan Manuel Figueroa Flotes

PATROCINADORES

Texas Instruments
Sociedad Matemática Mexicana
Instituto Kepler
Matedácticas
Universidad Anahuac
Instituto Politécnico Nacional
Reason Play,S.A.
Centro de Investigación y Docencia Económicas

Más información: http://www.esfm.ipn.mx/pierre_fermat/Paginas/Inicio.aspx