INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

ESCUELA SUPERIOR DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

20° Concurso Nacional de Matemáticas

Pierre Fermat

Guía conmemorativa para todos los niveles

20 años **2016**

20° CONCURSO NACIONAL DE MATEMÁTICAS

Pierre Fermat

2016

GUÍA CONMEMORATIVA PARA TODOS LOS NIVELES

20 años

Patrocinado por:

Texas Instruments

Sociedad Matemática Mexicana

Global Book

Reason Play S. A.

Matedácticas

Universidad Anáhuac

Instituto Politécnico Nacional

Instituto Kepler

Lic. Jorge Jair Herrera Flores

Centro de Investigación y Docencia Económicas, A. C.

Índice general

1 Presentación

1.1. Reseña

1.1.1. Visión del concurso

Desde la última década del pasado siglo, el Instituto Politécnico Nacional, a través de la Escuela Superior de Física y Matemáticas (ESFM), ha organizado el Concurso Nacional de Matemáticas *"Pierre Fermat"*. Este concurso, se lleva a cabo gracias a los recursos económicos aportados por el IPN y por los generosos donativos en especie de empresas, individuos e instituciones educativas públicas y privadas de todo el territorio nacional. Mención aparte, merece el entusiasta y desinteresado apoyo que para su realización brindan trabajadores administrativos y de intendencia, profesores, alumnos y ex alumnos de la ESFM, donando parte de su valioso tiempo y trabajo para la construcción de todo el marco sustantivo del concurso, desde la elaboración de guías de estudio, impresión y aplicación de examenes, página WEB y todos esos pequeños detalles que en su conjunto dan vida al concurso, el cual se ha convertido en una huella identificatoria de la ESFM y por ende del IPN.

1.1.2. Misión del concurso.

La ESFM, preocupada por la poca preparación matemática básica de la que hacen gala algunos alumnos de nuevo ingreso al IPN, se ha dado a la tarea de organizar el concurso Pierre Fermat, persiguiendo entre otros objetivos, el despertar el amor por las matemáticas en los estudiantes, captar alumnos y tener un patrón de referencia de la educación matemática en México.

1.2. Pierre de Fermat

1.2.1. Vida de Fermat

Pierre Fermat fue un abogado francés nacido el 17 de agosto de 1601 en Beaumont-de-Lomages, Francia, y fallecido el 12 de enero de 1665 en Castres, Francia. Fermat fue hijo de un herrero acaudalado y se benefició de una educación privilegiada vedada a gran parte del pueblo francés. Sus primeros estudios los realiza en el monasterio franciscano de Grandselve, estudiando posteriormente en la Universidad de Toulouse la carrera de leyes. Presionado por su familia, pasa a formar parte de la burocracia francesa, desempeñando por 30 años el puesto de consejero en la Cámara de las Peticiones del Parlamento de Toulouse. Por todo esto tendrá el derecho de anteponer a su apellido el artículo *"de"*, es decir, *Pierre de Fermat*.

1.2.2. Obra de Fermat

Las matemáticas no fueron una profesión para Fermat, sino su pasatiempo o como decimos en México *"por amor al arte"*, sin embargo, sus contribuciones a las matemáticas han sido trascendentes. Fermat nunca publicó sus trabajos en vida, gran parte de estos se conocen por la comunicación epistolar que intercambiaba con matemáticos de renombre como *Mersenne*, y por la recopilación que de ellos publicaron sus hijos, cinco años después de su muerte bajo el título de

"Varia Opera Mathematica". Entre algunas de sus aportaciones sobresale una Geometría Analítica propuesta varios años antes que la de *Descartes*, la Teoría de Probabilidades que desarrolló con *Pascal*, el Principio de Fermat de la Óptica Geométrica, los Fundamentos del Cálculo Diferencial, diseño el método de demostración del descenso infinito, mostró el potencial de las demostración por inducción. Pero al parecer fue la Teoría de Números lo que más gustó a Fermat y fue este amor lo que le llevo a proponer lo que por casi cuatro siglos representó el sueño inalcanzable, el así llamado, *Último Teorema de Fermat* y que motivó que gran parte de la Teoría de Números Algebraicos fuese desarrollada a partir de los intentos de *Ernst Eduard Kummer* y sus contemporáneos, todo ello con el fin único de demostrar tal Teorema. Por otra parte, este Teorema aparece en *"Varia Opera Mathematica"* sin demostración.

Para muchos de sus contemporáneos, Fermat fue un hombre de diversos matices. *Descartes* le llamó *fanfarrón*, quizá debido a su impotencia por descalificarlo en cuanto a su inteligencia y vastos conocimientos matemáticos. *Martin Mersenne*, con quien Fermat intercambiaba correspondencia, le calificaba de *el muy ilustrado hombre de Toulouse*, mientras que *Pascal*, que poseía un gran intelecto y un talento inusual para el pensamiento matemático, lo calificó como *el más grande matemático de Europa*, lo cual tal vez, molestaba a *Descartes*. *Wallis*, con quien Fermat polemizaba en cuanto a la importancia de sus resultados, se refería a él como *ese maldito francés*.

La fama de Fermat y por ende de su último Teorema, se debe a una nota marginal, manuscrita en uno de sus libros (al parecer fue en uno de los seis de los trece tomos que Fermat poseía de la obra *L' Arithmetica* recopilada por Diofanto de Alejandría) tal libro con las anotaciones de Fermat se ha perdido y sólo se sabe de su existencia por una edición de la *L' Arithmetica* publicada por Samuel Fermat, su hijo. En esta edición, Samuel transcribió la nota de su padre bajo los textos griego y latino de la pregunta 8 del libro 2. La nota dice textualmente:

Observatio Domini Petri De Fermat

- *Cubum autem in dous cubos, aut quadrato quadratum in duos quadrato quadratos, et generaliter nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duos eiusdem nominis fas est dividere: cuius rei demostrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caparet.*

Cuya traducción aproximada es:

Observación del Señor Pierre De Fermat

- *Es imposible separar un cubo en dos cubos, o una cuarta potencia en dos cuartas potencias o en general, cualquier potencia mayor que la segunda en dos potencias similares. He descubierto una demostración verdaderamente maravillosa de esto, pero este margen es demasiado pequeño y no cabe.*[1]

En notación matemática moderna el último Teorema de Fermat se escribe:

Teorema

Si $n \geq 3$ es un número entero, entonces la ecuación

$$x^n + y^n = z^n$$

no tiene soluciones enteras con $xyz \neq 0$.

En realidad, nunca sabremos qué quiso dar a entender Fermat con la críptica frase:

> *"He descubierto una demostración verdaderamente maravillosa de esto, pero este margen es demasiado pequeño y no cabe."*.

Algunos autores sostienen, que si Fermat no hubiese escrito tal frase, los matemáticos no se hubiesen empeñado tanto en demostrar su último Teorema.

[1] Existen varias versiones de esta nota en la literatura. Véase, por ejemplo [4].

Después de más de 350 años, el miércoles 23 de junio de 1993, un poco después de las 10:30 a.m., en el Instituto Isaac Newton en Cambridge, Inglaterra, el matemático británico radicado en Princeton, New York, Andrew Wiles, anunció, al final de la tercera parte de su conferencia *"Formas modulares, curvas elípticas y representaciones de Galois"*, que había probado el último teorema de Fermat.

Sin embargo, al poco tiempo empezaron a circular rumores de que había alguna dificultad con la demostración del teorema. Finalmente, en septiembre de 1994 y en colaboración con un antiguo alumno, Richard Taylor, de Cambridge, Wiles logró encontrar un argumento que permitió completar la tan buscada demostración. Fue en 1995 que al fin aparecieron las dos publicaciones en *Annals of Mathematics,* una larga, de más de 100 páginas, en donde aparece el grueso de la demostración y una más corta, en la que aparece el argumento que había estado faltando.[2,3]

1.3. Historia de los 20 años del concurso

Esta sección está basada en [9] y está redactada a manera de reconocimiento a los iniciadores del concurso. De manera semejante están escritos los problemarios para los distintos niveles y es la razón por la cual este año el concurso tiene una guía en común para sus tres niveles. El motivo por el cual, se

[2]Un excelente artículo, infortunadamente no publicado, sobre la vida y obra de Fermat y sobre todo lo referente a su último teorema es: **Sobre la vida y la obra de Pierre de Fermat (1601-1665),** Martha Rzedowski Calderón y Gabriel Villa Salvador, Departamento de Control Automático, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del I.P.N., marzo de 2011. Tal artículo, fue escrito amable y generosamente a petición expresa del autor de esta guía. Por lo tanto, este autor hace patente, por este medio, su agradecimiento. Los últimos dos párrafos de la sección 1.2, fueron tomados de este artículo.

[3]Sin embargo, a semejanza de lo que sucede con el Teorema Fundamental del Álgebra, la demostración de Wiles del último teorema de Fermat, se sale del contexto de la teoría de números.

eligió la guía [9], es porque es la última de la primera época del concurso.

Comencemos ....

1.3.1. Primera época del concurso Pierre Fermat, 1990-1996

Se lee en la Guía de Problemas de Nivel Superior del 7° Concurso de Matemáticas Pierre Fermat[4] del año 1996(véase [9]), lo siguiente:

> *Una de las tareas de la Escuela Superior de Física y Matemáticas desde su fundación en 1961, es formar profesionales en matemáticas a nivel licenciatura y posgrado, capaces de integrarse al término de sus estudios en las áreas de Investigación, desarrollo tecnológico y docencia.*
>
> *Por lo anterior, es importante realizar actividades con los jóvenes que realizan estudios en el Nivel Medio, Medio Superior o Superior conducentes a promocionar y estimular el gusto por las matemáticas, para que surjan de ahí en forma natural nuestros futuros estudiantes de ciencias.*
>
> *Congruente con la anterior la Escuela Superior de Física y Matemáticas, se ha dado a la tarea de organizar los concursos de matemáticas "PIERRE FERMAT" a partir de 1990.*

Así pues, el concurso Pierre Fermat, tiene su primera edición en 1990, llevándose a cabo anualmente hasta 1996, año en el que por diversos motivos, se suspende.

1.3.2. Segunda época del concurso Pierre Fermat, 2002→

Es hasta 2002, ya entrado el nuevo milenio, que la ESFM considera que las condiciones para la reapertura del concurso están dadas, por lo que desde este año y hasta el actual el concurso ha seguido ofreciéndose anualmente, a la

[4] Nótese que en ese año, el concurso aún no tenía el carácter de "nacional".

comunidad estudiantil mexicana, ahora con el nombre de *Concurso Nacional de Matemáticas Pierre Fermat.* Con diferentes bases de participación y llevándose a efecto en dos étapas, eliminatoria y final. Sin embargo, la misión y la visión en ambas épocas del concurso poco han variado. Sin embargo, el espíritu que anima el concurso es muy diferente en ambas épocas, esto lo describimos en la siguiente sección.

1.3.3. Diferencias entre ambas épocas del concurso Pierre Fermat

Las diferencias entre ambas épocas del concurso se hacen muy patentes en los requisitos para participar y en el desarrollo del concurso, siendo los requisitos muy restrictivos y constando el concurso de tres exámenes, tal como se puede leer en [9], a saber.

Requisitos de participación.

- **Nivel Secundaria.** A lo más estar inscrito en primer semestre de bachillerato y no haber cumplido 16 años al 1° de julio de 1996.
- **Nivel Medio Superior.** A lo más estar inscrito en quinto semestre de bachillerato y no haber cumplido 18 años al 1° de julio de 1996.
- **Nivel Superior.** A lo más estar inscrito en tercer semestre de licenciatura y no haber cumplido 20 años al 1° de julio de 1996.

Etapas del concurso Pierre Fermat

- **Eliminatoria.** Niveles Secundaria y Medio Superior. 5 de octubre de 1996 a las 9:00 hrs.
- **Semifinal.** Todos los niveles. 19 de octubre de 1996 a las 9:00 hrs.
- **Final.** Todos los niveles. 26 de octubre de 1996 a las 9:00 hrs.

En cada etapa se aplicará un cuestionario de tres preguntas con un tiempo de cuatro horas y media para contestarlo. Los exámenes se aplicarán en la Escuela Superior de Física y Matemáticas.

Para información sobre inscripciones, documentación necesaria para éstas y monto de los premios del concurso Pierre Fermat del año 1996, consúltese [9].

Por otra parte, según nos refiere el profesor **Fabio J. Dávila Ojeda** del Departamento de Matemáticas de la ESFM, el concurso de Matemáticas Pierre Fermat, nace a instancias de un grupo de estudiantes de la ESFM, que habiendo participado en olimpiadas de matemáticas, pensaron en un evento semejante para la ESFM, estos estudiantes, **Ernesto Lupercio Lara**, **José Luis Flores Silva**, **Luis Cruz Romo**, entre otros, piden y logran que las autoridades de la ESFM organicen el concurso pensado por ellos. De esta manera nace en 1990, el primer Concurso de Matemáticas Pierre Fermat, coordinado y fuertemente apoyado por el citado profesor F. Dávila Ojeda y por el estudiante **Francisco Javier Zaragoza Martínez**. Así pues, éste concurso, comienza localmente para estudiantes de ESFM y algunos otros de nivel medio superior y secundaria que se lograse captar. Además, como se refleja en sus guías esta fuertemente influenciado por las experiencias olímpicas de sus iniciadores. Este grupo de estudiantes y profesores se disgrega en 1996, dando con ello término a la primera época del concurso. En la segunda época del concurso que da inicio en 2002, se le da el carácter de nacional al abrirse a estudiantes de toda la república y al eliminarse las restricciones en cuanto a edad de los concursantes, restricciones que el actual comité organizador considera injustas. Asimismo, y esto es lo destacable de la segunda época del concurso, es que se le ha desvinculado de las olimpiadas, se han introducido nuevos temas para evaluar a los concursantes y se han eliminado los problemas "tipo olimpiada" con todo esto se ha logrado que el concurso se haya convertido en una evento propio de la ESFM e instituciones que con ella cooperan en su organización y captación de concursantes. En suma, actualmente el Concurso Nacional de Matemáticas Pierre Fermat es parte de la "huella académica" de la ESFM y es un instrumento útil para evaluar el estado que guarda la educación matemática en México. Por último, el actual comité organizador del concurso, piensa que teniendo las olimpiadas de matemáticas, su propio comité organizador y un presupuesto que excede con mucho los modestos recursos generosamente concedidos por sus patrocinadores (muchos de ellos de la iniciativa privada y algunos otros a título personal) al concurso Pierre Fermat,[5] y, contando el comité de olimpiadas con infraestructura propia en varias universidades del país, tal como la Facultad de Ciencias de la UNAM, así como del apoyo académico que le plazca, es innecesario y quizá hasta grotesco duplicar funciones, esto es, en nada beneficiaría a un concursante resolver en el Concurso Pierre Fermat, el mismo tipo de problemas que en las olimpiadas. Por todo esto, los problemas del actual Concurso Nacional de Matemáticas Pierre Fermat, buscan centrar al estudiante en lo que se espera de él en el desarrollo de su trabajo profesional y académico.

1.3.4. Sedes del séptimo concurso Pierre Fermat, 1996

Con el fin de evaluar la expansión del concurso a nivel nacional, presentamos la lista de las sedes con las que contó el concurso en 1996.

- **En la ciudad de México.** Escuela Superior de Física y Matemáticas.
- **En la ciudad de Guadalajara.** Universidad de Guadalajara, Sistema de Educación Media Superior.
- **En el Estado de México.** Preparatoria Oficial # 55, Francisco I. Madero.
- **En el Estado de Sonora.** Universidad de Sonora, Departamento de Matemáticas.

[5] Por otra parte, los participantes del concurso Pierre Fermat, cuentan sólo con sus propios recursos académicos, pues el concurso no cuenta con entrenadores ni con infraestructura para entrenamientos.

1.3.5. Trabajo matemático de Fermat según la guía del concurso de 1996, [9]

Como ya vimos en 1.2.2, la demostración del último teorema de Fermat se anunció en 1993, concretándose su publicación en 1995, resulta por tanto, de sumo interés reproducir lo que se dice del trabajo matemático de Fermat en la guía del concurso del año 1996. En particular, lo que se dice sobre su último teorema.

Fermat hizo contribuciones al álgebra, al análisis, a la geometría analítica y al cálculo de probabilidades, preocupándose siempre por utilizar el método inductivo. En aquellos años en que la artmética se estudiaba junto con la geometría, Fermat sentó las bases para la moderna teoría de los números. Entre otros trabajos, este matemático francés propuso los siguientes teoremas:

a) Los números primos de la forma $4n+1$ pueden expresarse de manera única como suma de dos cuadrados.

b) $a^{p-1}-1$ es divisible por p si p es primo y si $(a,p)=1$

c) No existen números enteros no nulos x, y, z que satisfagan a la ecuación $x^n+y^n=z^n$ para $n\geq 3$.

La demostración del Teorema (a), le tomó siete años a Euler. El Teorema (c) es conocido como el último teorema de Fermat y constituye uno de los más conocidos problemas de la matemática moderna. Este teorema fue descubierto por Fermat en 1637, después de 358 años, en 1995, Andrew Wiles, probó que es verdadero.

Por lo tanto, en el año 1996, el comité organizador del concurso, sabía ya que el último teorema de Fermat había sido demostrado, lo que reflejo en la portada de las guías del año 1995.

2 Concurso Pierre Fermat 2016

2.1. Descripción

El Concurso Nacional de Matemáticas Pierre Fermat, contempla tres categorías: *Nivel Secundaria, Nivel Medio Superior* y *Nivel Superior*. Tal concurso se realizará en dos etapas: *Eliminatoria* y *Final*. La primera consiste de un examen de 25 preguntas de opción múltiple a resolverse en 3 horas. La segunda consta de un examen escrito de 5 problemas de respuesta abierta (en cada nivel), con un tiempo de 4 horas para su solución.

2.2. Bases del concurso

Estar inscrito durante el ciclo escolar 2015-2016 en alguna institución pública, privada o perteneciente al sistema educativo militar (Ejército, Fuerza Aérea o Armada) dentro del país, en el nivel escolar correspondiente. No se considera límite de edad, ni semestre ni año en el que se encuentre inscrito. Se deberá presentar comprobante de estudios vigente al momento de presentar el correspondiente examen (credencial o constancia). Cada concursante, deberá inscribirse en la categoría correspondiente al nivel de estudios que esté cursando a la fecha del primer examen. Consultar las fechas en las secciones 9 y 10.

2.3. Premios

Diploma de participación para todos los concursantes y, a su vez, se premiará cada categoría, quedando a criterio del jurado la posibilidad de declarar desierto algún lugar de cada categoría. Se tiene además, un total de al menos once menciones honoríficas. Los ganadores de cada categoría obtendrán premios en efectivo, tabletas y libros. Además, para los ganadores del nivel medio superior y superior se tendrán calculadoras.

2.4. Premiación

Tendrá verificativo el día 4 de noviembre de 2016 y el lugar en donde se realizará será publicado en la página oficial del concurso. Los premios serán entregados únicamente durante la ceremonia de premiación, ya sea al ganador o a su representante.

2.5. Inscripciones

La inscripción al concurso es totalmente gratuita y se realizará del 1 de marzo al 5 de junio del año en curso por vía electrónica en la página web del concurso:

http://esfm.ipn.mx/fermat

2.6. Examen de la etapa eliminatoria

Se llevará a cabo para todos los niveles, el sábado 11 de junio del año 2016 de las 10:00 a las 13:00 hrs., en la sede que corresponda a su inscripción.

2.7. Examen de la etapa final

Se llevará a cabo para todos los niveles, el sábado 3 de septiembre de 2016 de las 10:00 a las 14:00 hrs., en la Escuela Superior de Física y Matemáticas del I.P.N. y sedes alternas por definir.

2.8. Sedes

Escuela Superior de Física y Matemáticas del IPN.

Unidad Profesional *Adolfo López Mateos* del I.P.N., Edificio 9, Colonia Lindavista, C. P. 07738, Depto. de Matemáticas, México, D. F. Tel. 57 29 60 00 ext. 55018.

`Responsables:` Dr. José Oscar González Cervantes.

`Modalidad:` Todos los niveles.

Escuela Preparatoria Oficial No. 170.

Lomas de Murcia s/n, C. P. 55736. Coacalco, Estado de México. Tel. 26444856.

`Responsable:` M. en C. Enrique Corona Ornelas.

`Modalidad:` Secundaria y Media Superior.

Colegio Panamericano Texcoco, Secundaria y Preparatoria S. C.

Carr. Molino de Flores, Calle Privada de Crisantemos No 3, Fracc. la Paz, Texcoco, Estado de México. Tel. (01 595) 95 51 385 ext. 104.

`Responsable:` Fís. Fernando Chávez León.

`Modalidad:` Secundaria y Medio Superior.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.

Edificios 158 y 190 Ciudad Universitaria. Avenida San Claudio y Río Verde s/n, Col. Jardines de San Manuel, Puebla, Pue. C.P. 72570. Tel. (222) 2 29 55 00 ext. 7578.

`Responsable:` Dra. María Araceli Juárez Ramírez.

`Modalidad:` Todos los niveles.

Facultad de Matemáticas, Universidad Veracruzana.

Circuito Gonzalo Aguirre Beltrán s/n. Zona Universitaria, C. P. 91060. Xalapa, Veracruz, México. Tel. (228) 8 42 17 45, Fax (228) 1 41 10 45.

`Responsable:` Dr. Raquiel R. López Martínez.

`Modalidad:` Todos los niveles.

Colegio Juana de Arco.

Calle Abasolo No. 45. Col. Centro, Cuernavaca, Morelos. Tel. (01-777) 312-9113

`Responsable:` Ing. Noé Jonhatan Gómez Hernández.

`Modalidad:` Todos los niveles.

Escuela el "El Peñón".

Ex-hacienda Montefalco s/n, Col. Santa Clara. Jonacatepec, Morelos.

Tel. (735)355 03 43 ext. 113

`Responsable:` Ing. Noé Jonhatan Gómez Hernández.

`Modalidad:` Todos los niveles.

Departamento de Escuela Secundaria General.

Carretera Federal Libre Tlaxcala-Puebla Km 1.5, Colonia Las Animas, Tlaxcala C. P. 90030. Tel. Oficina 01 (246) 46 2 36 00 ext. 1107.

`Responsable:` Oscar Montiel González.

`Modalidad:` Secundaria y Medio Superior.

Universidad Autónoma de Aguascalientes.

Departamento de Matemáticas y Física, edificio 26. Av. Universidad no. 940, Ciudad Universitaria. C. P. 20100, Aguascalientes,

`Responsable:` Dr. Hugo Rodríguez Ordoñez.

`Modalidad:` Medio Superior y Superior.

Universidad Autónoma de Yucatán.

Anillo Periférico Norte, Tablaje Cat. 13615, Col. Chuburná Hidalgo Inn, Mérida Yucatán Tel. (999) 9423140 al 49.

`Responsable:` M.C.M. Reymundo Ariel Itzá Balam.

`Modalidad:` Todos los niveles.

Instituto Tecnológico de Oaxaca.

Av. Ing. Víctor Bravo Ahuja No. 125 esq. Calz. Tecnológico C. P. 68034 Oaxaca, Oax. Tel (951)5015016.

`Responsable:` Prof. Rubén Doroteo

`Modalidad:` Todos los niveles.

Instituto Tecnológico de Tlaxiaco.

Boulevard Tecnológico Km. 2.5, Llano Yosovee C. P. 69800. Tlaxiaco, Oax. Tel. Dir. (953) 55 20788, (953) 55 21322.

`Responsable:` Prof. Antonio Miguel Mendoza

`Modalidad:` Superior.

Instituto Tecnológico Superior de Perote.

Km. 2.5 Carretera Federal Perote-México C. P. 91270, Perote, Veracruz. Tel. 01(282) 825 31 50.

`Responsable:` M. en C. Fabián Valera Rivera

`Modalidad:` Todos los niveles.

Instituto Tecnológico Superior de Zacapoaxtla.

Carretera Acuaco-Zacapoaxtla Km. 8, Col. Totoltepec, C. P. 73680. Zacapoaxtla, Pue. Tel. y Fax. 01 233 317 5000 ext. 310.

`Responsable:` Ing. José Luis García Arellano

`Modalidad:` Medio Superior y Superior.

Universidad del Mar (Campus Puerto Escondido).

Ciudad Universitaria, Carr. vía Sola de Vega, Puerto Escondido, San Pedro Mixtepec, Juquila, Oaxaca, México. C. P. 71980 Tel. 95458-24990, 95458-24995, 95458-24996. Fax. 95458-24992, ext. 311.

`Responsable:` Ing. Saúl Gómez Carreto.

`Modalidad:` Todos los niveles.

Universidad Tecnológica de la Mixteca.

Carretera a Acatlima Km. 2.5 C. P. 69000, Huajuapan de León, Oaxaca. Tel. 01 (953)-53-20-399 ext. 500.

`Responsable:` M. En C. Mario Lomelí Haro.

`Modalidad:` Todos Los Niveles.

Universidad Tecnológica de la Región Norte de Guerrero.

Av. Catalina Pastrana s/n, Colonia Ciudad Industrial C. P. 40030, Iguala, Guerrero. Tel-Fax. (733)3340694 y 3340695 ext. 120 Y 130.

`Responsable:` M. en C. Ernestino Alemán Mejía.

`Modalidad:` Todos los niveles.

Colegio de Estudios Científicos y Tecnológicos del Estado de México (Campus Jilotepec).

Av. Independencia s/n, 1^a manzana, Villa de Canalejas, Jilotepec Edo. de Mex., C. P. 54270, Tel. (01761) 7341697.

`Responsable:` M. en C. Virginia Garrido Adame.

`Modalidad:` Secundaria y Media Superior.

Centro de Investigación en Matemáticas, A. C.

Callejón Jalisco s/n, Col. Valenciana C. P. 36240 Guanajuato, Gto, México, Apartado Postal 402, C. P. 36000 Tel. + 52 473 732 7155 / 735 0800, Fax +52 473 732 5749

`Responsable:`

`Modalidad:` Todos los niveles.

2.9. Directorio

Instituto Politécnico Nacional

Enrique Fernández Fassnacht

Director General

Julio Gregorio Mendoza Álvarez

Secretario General

Miguel Ángel Álvarez Gómez

Secretario Académico

Escuela Superior de Física y Matemáticas

Miguel Tufiño Velázquez

Director

Emigdio Salazar Cordero

Subdirector Académico

Adrián Alcántar Torres

Jefe del Departamento de Matemáticas

Comité Organizador

Santiago Marcos Zepeda Martínez

Pablo Lam Estrada

José Oscar González Cervantes

Abelardo Santaella Quintas

Rubén Santos Mancio Toledo

José Humberto Ávila Sandoval

Félix Fernández Méndez

Raciel Vásquez Aguilar

Virginia Garrido Adame

Eliseo Sarmiento Rosales

Juan Manuel Figueroa Flores

Alejandro Bribiesca Sánchez

Israel Isaac Gutiérrez Villegas

2.10. Contacto

Información de sedes, guías, cártel y avances del concurso en:

http://esfm.ipn.mx/fermat

Dudas y comentarios en:

fermat@ipn.mx, xolocuate@yahoo.com.mx

2.11. Ganadores de la edición 2015 del Concurso Pierre Fermat

Superior	
Primer lugar	**José Luis Miranda Olvera** Facultad de Ciencias U. N. A. M.
Segundo lugar	**Mauricio Adrián Che Moguel** Facultad de Matemáticas Universidad Autónoma de Yucatán
Tercer lugar	**Adán Ricardo Vera Euan** Facultad de Matemáticas Universidad Autónoma de Yucatán **Venancio Iván Nieto Nieto** Escuela Superior de Física y Matemáticas, I. P. N.

Media superior	
Primer lugar	**Rodrigo Andrés Cariño Escobar** Colegio Montes de Oca Campus Tzompantle
Segundo lugar	**Alan Enrique Ontiveros Salazar** Sede: E. S. F. M.
Tercer lugar	**María Cecilia Rojas Cuadra** Sede: B. U. A. P.

Secundaria	
Primer lugar	**Oliver Vicente García Esparza** Sede: U. A. N. L.
Segundo lugar	**Kenny Eduard Vercaemer González** Sede: Colegio del Peñón
Tercer lugar	**Diego Moisés Galeote Guevara** Sede: B. U. A. P.

2.12. Menciones Honoríficas de la edición 2015 del Concurso Pierre Fermat

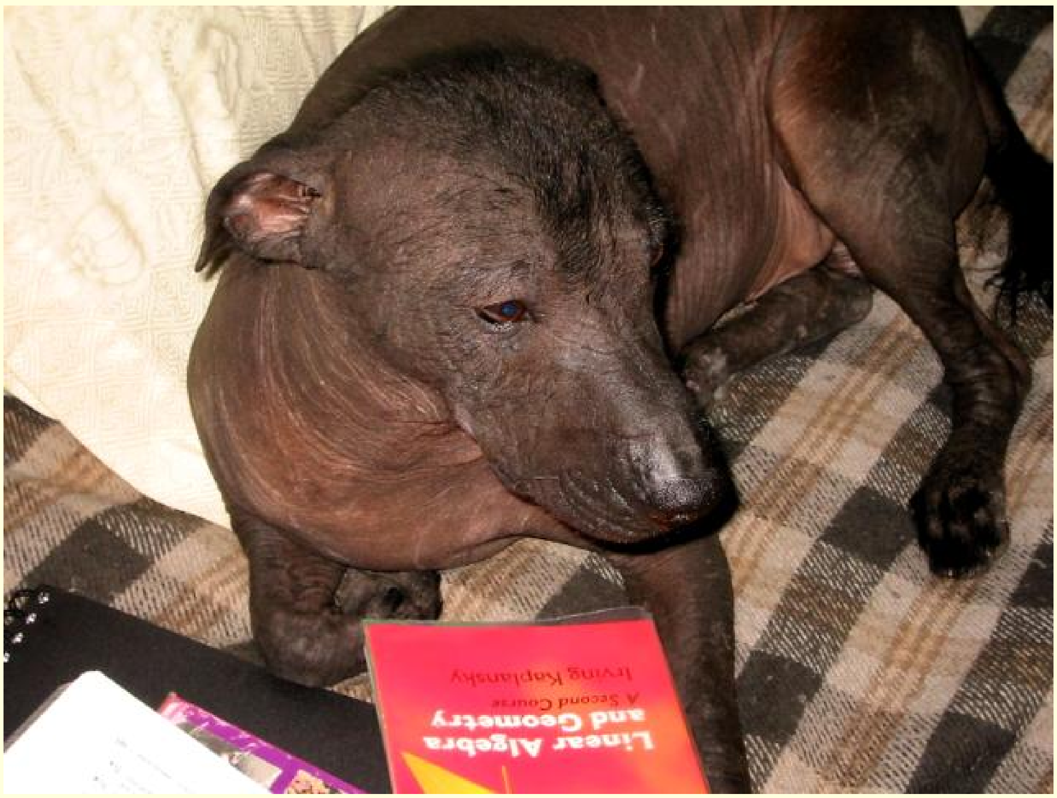
Superior	
Manuel Jesús Novelo Puc	Universidad Autónoma de Yucatán
César Ernesto Rodríguez Angón	Escuela Superior de Física y Matemáticas I. P. N.
Juan José Braulio Velasco Nava	Escuela Superior de Física y Matemáticas I. P. N.

Medio superior	
Saúl Adrián Álvarez Tapia	Sede: E. S. F. M.
Víctor Hugo A. De la Fuente Jiménez	Sede: U. A. N. L.

Secundaria	
Miguel Yair Márquez Reyes	Sede: U. A. de Y.
Jonatán Alejandro González Cázares	CEDI
David Emmanuel González Cázares	CEDI
Violeta Alitzel Martínez Escamilla	Colegio del Peñón
Ayax Calderón Camacho	Sede: ESFM

2.13. Breviario Cultural

EL xoloitzcuintle, perro pelón mexicano



xoloitzcuintli[1] s. Especie de lobo (Hern.) o de perro completamente pelado, que los indios cubrían con un paño para protegerlo del frío de la noche (Sah.). R. *xolotl, itzcuintli*. Véase [7]

"Criaban en esta tierra unos perros sin pelo ninguno, lampiños, y sí algunos pelos tenían eran muy pocos".[2]

[1] Actualmente, el vocablo castellanizado es *"xoloitzcuintle"*.

[2] **Fray Bernardino de Sahagún**, *Historia General de las cosas de Nueva España*.

3 Problemas para nivel Superior

Reproducimos ahora, parte de los problemas de la guía para el nivel superior del año 1996. Véase [9].

3.1. Problemas de geometría

Problema 3.1

Sean $A_1, A_2, \ldots, A_{1988}$ los vértices de un polígono regular P de 1988 lados. Suponer que cada uno de los lados de P tiene longitud ℓ. Sean $C_1, C_2, \ldots, C_{1988}$ las circunferencias con centro en A_i, $i = 1, 2, \ldots, 1988$ respectivamente, y radio ℓ/κ en donde κ es un entero cuadrado perfecto. Calcular $\sum_{1=1}^{1988} \alpha_1$ en donde, para cada $i = 1, 2, \ldots, 1988$, $\alpha_i = \textit{área}\,(C_i \cap P)$.

Problema 3.2

Sean $\square ABCD$ un cuadrilátero cíclico, E el punto de intersección de las bisectrices en A y B y L y M dos puntos en $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$, respectivamente, tales que la recta $\overline{LM}$ pasa por E y es paralela a $\overline{DC}$. Demostrar que $LA + BM = LM$.

Problema 3.3

Sean $\triangle ABC$ un triángulo y A', B', C' las reflexiones respectivas de los vértices A, B y C a través de los lados $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ y $\overline{AB}$. Encontrar condiciones necesarias y suficientes sobre el triángulo $\triangle ABC$, de manera tal, que el triángulo $\triangle A'B'C'$ resulte ser equilátero.

3.2. Problemas de álgebra

Problema 3.4

¿Cuántas raíces tiene la ecuación $x^5 - 5x + k = 0$ en el intervalo $[-1, 1]$?[1]

[1]Nótese que debe considerarse $k \in \mathbb{R}$.

Problema 3.5

Dada la ecuación $x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0$, demostrar que si la suma de dos de sus raíces es igual a la suma de las otras dos, entonces $p - 4pq - 8r = 0$ y que si el producto de dos de sus raíces es igual al producto de las otras dos, entonces $r^2 = p^2 s$.[2]

Problema 3.6

Encontrar todas las matrices $\mathsf{A} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ tales que:

i) A sea diagonal.

ii) Satisfagan la ecuación $\mathsf{A}^2 + \mathrm{I}_2 = \mathbb{O}_2$.

Demostrar además, que no existen matrices $\mathsf{A} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ que satisfagan las condiciones (i) y (ii) anteriores.

Problema 3.7

Sean $u, v \in \mathbb{R}$ tales que:

$$u + u^2 + \cdots u^8 + 10u^9 = 8 = v + v^2 + \cdots v^{10} + 10v^{11}.$$

¿Cuál de los dos números es mayor que el otro?

Problema 3.8

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función que satisface las siguientes condiciones:

$$f(x + 19) \leq f(x) + 19 \tag{3.1}$$

$$f(x + 94) \geq f(x) + 94 \tag{3.2}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Demostrar que $f(x + 1) = f(x) + 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Problema 3.9

Sea $\mathbb{F}_{2n} = \{1, 2, \ldots, 2n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Encontrar el número de elementos de $\mathscr{P}(\mathbb{F}_{2n})$ en los cuales la ecuación

$$x + y = 2n + 1 \tag{3.3}$$

no tenga solución

[2] ¿Existe alguna diferencia al considerar $p, q, r, s \in \mathbb{R}$ y $p, q, r, s \in \mathbb{C}$?

3.3. Problemas de teoría de números

Problema 3.10

Sea $\alpha = \sum_{k=1}^{1900} x_k^2$. Demostrar que si x_k es un número entero impar para todo k, entonces α no es un cuadrado perfecto.

Problema 3.11

Sea $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la función de Euler. Demostrar que para cada $\alpha \in \mathbb{N}$, $n \mid \varphi(\alpha^n - 1)$.

Problema 3.12

Demostrar que si $4^n + 2^n + 1$ es un número primo, entonces n debe ser una potencia de 3.

Problema 3.13

Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, la función definida por recurrencia como sigue:

$$f(1) = 1, \quad f(2) = 2;$$

$$f(n+2) = f(n+2-f(n+1)) + f(n+1-f(n)), \; n \geq 1.$$

Demostrar que

i) $0 \leq f(n+1) - f(n) \leq 1$.

ii) Si $f(n)$ es impar, entonces $f(n+1) = f(n) + 1$.

Encontrar todos los valores de n para los cuales $f(n) = 2^{10} + 1$.

3.4. Problemas de combinatoria

Problema 3.14

Demostrar que en toda gráfica el número de vértices impares es par.

Problema 3.15

Demostrar que $\binom{2n}{n} = \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2$.

Problema 3.16

Suponer que se poseen n segmentos de longitudes $1, 2, \ldots, n$. Demostrar que el número de maneras en que se pueden elegir cuatro de ellos para formar un cuadrilátero en el que se pueda inscribir una circunferencia es:

$$\frac{1}{48}\left(2n(n-2)(2n-5) - 3 + 3(-1)^n\right).$$

3.5. Problemas de cálculo

Problema 3.17

Demostrar que $\dfrac{1}{9} \leq \sqrt{66} - 8 \leq \dfrac{1}{8}$.

Problema 3.18

Sean $x, y, z \in \mathbb{R}$. Demostrar que:

$$\sin\left(x^3\right) + \sin\left(y^3\right) + \sin\left(z^3\right) + \sin(xyz) \leq 4.$$

Problema 3.19

Encontrar todas las sucesiones reales $(a_n)_n$ tales que:

$$a_1 = 1 \quad \text{y} \quad |a_n - a_m| \leq \frac{2mn}{m^2 + n^2} \quad \text{para cada} \quad m, n \in \mathbb{N}.$$

Problema 3.20

Encontrar todas las funciones continuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que:

$$f(x+y)\, f(x-y) = \left(f(x) \cdot f(y)\right)^2.$$

Problema 3.21

Encontrar todas las funciones analíticas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que:

$$f(x) = x f'\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}.[3]$$

[3] Debe tenerse presente la diferencia esencial entre la analiticidad de funciones de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ y la de funciones de $\mathbb{C}$ a $\mathbb{C}$.

4 Problemas para nivel Medio Superior

La guía de problemas de nivel medio superior para este año, consiste de un extracto de la guía del año 1996. Véase [10].

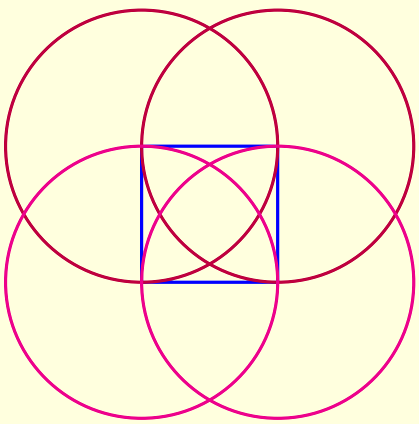
4.1. Problemas de Geometría

Problema 4.1

Si se trazan tres tangentes a una circunferencia, de manera que éstas formen un triángulo, demostrar que la probabilidad de que tal triángulo circunscriba a la circunferencia es $\frac{1}{4}$.

Problema 4.2

Sean $\square$ABCD un cuadrado de lado ℓ y γ_A, γ_B, γ_C, γ_D cuatro circunferencias de radio ℓ y centros en A, B, C y D, respectivamente.



Encontrar el valor del área de la intersección de los interiores de las cuatro circunferencias.

Problema 4.3

Si A y B son dos puntos en el plano cartesiano, demostrar que el lugar. geométrico de los puntos M en el plano cartesiano tales que $\overline{AM}^2 - \overline{MB}^2 = k$ es una recta perpendicular a $\overline{AB}$:

Problema 4.4

Sean $\triangle ABC$ un triángulo y D un punto en $\overline{AC}$ que satisface las siguientes condiciones:

i) $AD = DC = 1$.

ii) $\measuredangle ABD = 90^\circ$.

iii) $\measuredangle DBC = 30^\circ$.

Encontrar el valor de AC.

Problema 4.5

Demostrar que el área del triángulo de lados a, b, c es menor o igual al área del triángulo de lados:

$$\frac{a+b}{2}, \qquad \frac{b+c}{2}, \qquad \frac{a+c}{2}.$$

Problema 4.6

Sea E un punto interior del cuadrilátero convexo $\square ABCD$. Si E satisface las siguientes condiciones:

i) $\measuredangle BAC = \measuredangle BDA = \measuredangle EBA$,

ii) $\measuredangle BCA = \measuredangle ABD = \measuredangle EAB$,

demostrar que los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle CED$ son semejantes.

Problema 4.7

Un cuadrilátero con lados a, b, c, d está inscrito en una circunferencia de radio R. Demostrar que si $a^2+b^2+c^2+d^2 = 8R^2$, entonces el cuadrilátero tiene un ángulo recto o sus diagonales son perpendiculares.

Problema 4.8

Dado un k-gono convexo ($k \in \mathbb{N}$, $k \geq 3$) y $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3(k-2)$, demostrar que el k-gono puede descomponerse en n cuadriláteros cíclicos con interiores ajenos dos a dos.

4.2. Problemas de álgebra

Problema 4.9

Resolver la ecuación $\sqrt[3]{6\,(5x+6)} - \sqrt[3]{5\,(6x-11)} = 1\,.$

Problema 4.10

Sean $x, y, z \in \mathbb{R}$, con $x, y, z, x+y+z \neq 0$ y n un número entero impar. Demostrar que si

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{x+y+z}\,,$$

entonces

$$\frac{1}{x^n} + \frac{1}{y^n} + \frac{1}{z^n} = \frac{1}{x^n+y^n+z^n}\,.$$

Problema 4.11

Si $\alpha^2 + \beta^2 = 7\alpha\beta$, demostrar que:

$$\log\left(\frac{1}{3}\,(\alpha+\beta)\right) = \frac{1}{2}\,(\log\alpha + \log\beta)\,.$$

Problema 4.12

Demostrar que

$$\left(\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}\right)^{-1}$$

es un cubo perfecto.

Problema 4.13

Sean $a, b, c \in \mathbb{R}^+$. Demostrar que

$$\frac{a+b}{c}\cdot\frac{b+c}{a}\cdot\frac{c+a}{b} \geq 8\,.$$

Problema 4.14

Si a, b y c son números reales no negativos tales que

$$(1+a)\,(1+b)\,(1+c) = 8,$$

demostrar que $abc \leq 1$.

Problema 4.15

Demostrar que para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ se cumple:

$$\sqrt{2\sqrt[3]{3\sqrt[4]{4\cdots\sqrt[n]{n}}}} < 2\,.$$

Problema 4.16

Encontrar todos los números racionales r, tales que las soluciones de la ecuación:

$$rx^2 + (r+1)x + (r-1) = 0$$

sean todas enteras.

Problema 4.17

Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Demostrar que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^n \leq \frac{a^n + b^n}{2}\,.$$

4.3. Problemas de teoría de números

Problema 4.18

Si p es un número primo y a, b son números naturales menores que p, demostrar que el número $a^{p-2} + a^{p-3}b + \cdots + b^{p-2}$ es múltiplo de p.

Problema 4.19

Demostrar que la última cifra decimal de $6 \cdot 3^{2n} - 2^{2n}$ es cero.

Problema 4.20

Demostrar que si $a, b, c \in \mathbb{N}$ son tales que $a^2 + b^2 = c^2$, entonces abc es múltiplo de 30.

Problema 4.21

Sean $n \in \mathbb{N}$ y p el menor número primo que divide a n y tal que $p > \sqrt[3]{n}$. Demostrar que n/p es un número primo.

Problema 4.22

Sea n un número natural. Demostrar que para todo $k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$, se tiene que:

$$(n+1)(n+2)\cdots(2n-1)(2n)$$

es divisible por 2^k.

Problema 4.23

Sea $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ una función tal que $f(n!) = f(n)!$. Encontrar los posibles valores de n.[1]

Problema 4.24

Encontrar todas las ternas de números racionales positivos x, y, z tales que

$$x+y+z, \qquad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \quad \text{y} \quad xyz$$

sean números enteros.

Problema 4.25

Sean $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_n < \cdots$ números enteros no negativos tales que $a_{2n} = a_n + n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Se sabe que si a_n es primo, entonces n es primo. Encontrar a_{1994}.

Problema 4.26

Encontrar todos los números naturales $n < 1000$ tales que:

i) Si p es primo y $p \mid n$, entonces $p^2 \nmid n$.

ii) La suma de sus divisores es potencia de 2.

[1] En otras palabras, se trata de encontrar el dominio de definición de la función f.

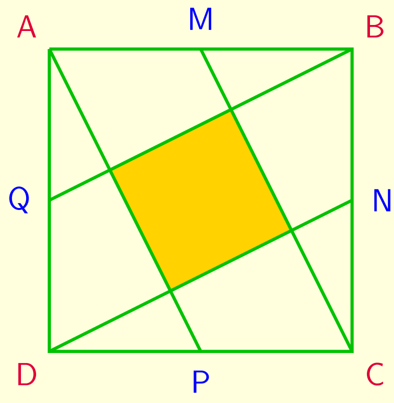
5 Problemas para nivel Secundaria

La guía de problemas de este año, es un extracto de la guía de problemas del año 1995. Véase [11].

5.1. Problemas de geometría

Problema 5.1

Si M, N, P y Q son los puntos medios de los lados del cuadrado □ABCD de área igual a 1, ¿cuál es el valor del área de la parte sombreada?



Problema 5.2

Demostrar que la suma de las distancias desde cualquier punto de la base del triángulo isósceles hasta sus lados, es igual a la altura de este triángulo trazada hasta el lado de éste.[1]

Problema 5.3

Demostrar que:

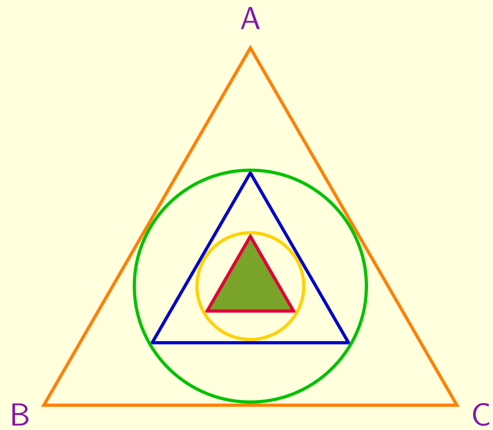
$$\operatorname{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1.$$

para $0 \leq \alpha \leq 90°$.

[1]Para toda duda sobre la redacción de este problema, consultar [11].

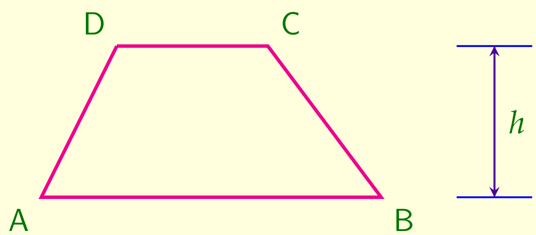
Problema 5.4

Si en la figura todos los triángulos son equiláteros y si el área del triángulo $\triangle ABC$ es 16, calcular el valor del área sombreada.



Problema 5.5

Demostrar que el área del trapecio:



es: $\dfrac{AB + DC}{2} \cdot h$

Problema 5.6

En un triángulo rectángulo ⊿ABC el punto M se escoge en el lado $\overline{BC}$ de modo que $BM = 2MC$ y el punto K es el punto medio de la hipotenusa $\overline{AB}$. Demostrar que $\angle BAM = \angle MKC$.

Problema 5.7

Un punto T se encuentra dentro de un rectángulo. El punto T se une con segmentos a los vértices del rectángulo. Demostrar que se pueden escoger tres de estos segmentos para formar un triángulo.

Problema 5.8

Las longitudes de los lados de un triángulo son a, b y c. Si $ab+bc+ac=12$, demostrar que $6 \le a+b+c \le 7$.

5.2. Problemas de álgebra

Problema 5.9

Demostrar que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene:

$$1+2++\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Problema 5.10

Si $x>1$ diga cual de las dos siguientes proposiciones es verdadera:

$a)$ $x^3+1>x^2+x$.

$b)$ $x^2+x>x^3+1$.

Justificar sus respuesta.

Problema 5.11

Encontrar el valor de x si:

$$x=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}.$$

Problema 5.12

Resolver la ecuación:

$$2^{2x}+4^{x-1}=3^{x+1}-3^{x-3}.$$

Problema 5.13

Resolver la ecuación:

$$x^2+3=\sqrt{x^2-2x+2}+2x.$$

Problema 5.14

Sea $x > 0$. Demostrar que:

i) $\dfrac{1}{x} + x \geq 2$.

ii) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^3} + \cdots + \dfrac{1}{x^{11}} + \dfrac{1}{x^{13}} \leq \dfrac{7}{x^7}$.

5.3. Problemas de combinatoria

Problema 5.15

¿Cuántos divisores positivos tiene 1990?

Problema 5.16

¿Cuántos números menores que $10,000$ pueden formarse con los dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7?

Problema 5.17

¿Cuántos números impares de 7 dígitos se pueden escribir con los dígitos que aparecen en el número 1993.

Problema 5.18

Un **número australiano** es un número entero que escrito en el sistema decimal tiene el mismo valor de pie que de cabeza.[2] Calcular la cantidad de números australianos menores que $100,000$.

Problema 5.19

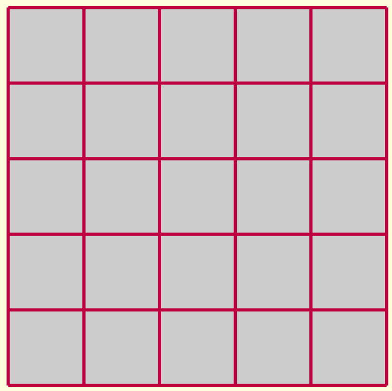
i) El rectángulo $m \times n$, con $m, n \in \mathbb{N}$, es dividido en mn cuadrados unitarios. ¿Cuántos de ellos son cortados por la diagonal del rectángulo?

ii) El paralelepípedo rectángulo $m \times n \times k$, con $m, n, k \in \mathbb{N}$, es dividido en mnk cubos unitarios. ¿Cuántos de ellos son cortados por la diagonal del paralelepípedo?

[2] Por ejemplo, 818 es un número australiano, no así 69.

Problema 5.20

En la cuadrícula de la figura:



¿cuántas H hay?

5.4. Problemas de teoría de números

Problema 5.21

Demostrar que $n^2 + 3n + 2$ es un número par para todo $n \in \mathbb{N}$.

Problema 5.22

Notamos que $1981 = 13^3 - 6^3$, ¿cuál es el siguiente año del segundo milenio que es suma o diferencia de dos cubos?

Problema 5.23

¿Con cuántos ceros termina el número $1000!$?

Problema 5.24

Encontrar todos los números naturales x, y tales que $\dfrac{x+1}{y}$ y $\dfrac{y+1}{x}$ sean números naturales.

Problema 5.25

¿Para cuáles valores enteros de x es $x^2 + 615$ un cuadrado perfecto?

Bibliografía

[1] C. B. Boyer, *History of Analytic Geometry,* New York, Dover Publications, Inc., 2004.

[2] C. B. Boyer, *The History of the Calculus and its Conceptual Develoment,* New York, Dover Publications, Inc., 1949.

[3] J. L. Coodlige, *A History of the Conic Sections and Quadric Surfaces,* New York, Dover Publications, Inc., 1968.

[4] H. M. Edwards, *Fermat's Last Theorem, a Genetic Introduction to Algebraic Number Theory*, New York, Springer–Verlag, 1977.

[5] P. M. González Urbaneja, *Las raíces del cálculo infinitesimal en el siglo XVII,* Madrid, Alianza Editorial S. A., 1992.

[6] G. H. Hardy and E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers,* sixth edition, New York, Oxford University Press, Inc., 2008.

[7] Rémi Siméon, *Diccionario de la Lengua Náhuatl o Mexicana,* México, Siglo Veintiuno Editores, S. A. de C. V., 1999.

[8] D. J. Struik (editor), *A source Book in Mathematics, 1200-1800,* Cambridge, Massachusetts, Hardvard University Press, 1969.

[9] ———, *Guía de Problemas de Nivel Superior del 7° Concurso de Matemáticas Pierre Fermat,* México, E. S. F. M. del I. P. N., 1996.

[10] ———, *Guía de Problemas de Nivel Medio Superior del 7° Concurso de Matemáticas Pierre Fermat,* México, E. S. F. M. del I. P. N., 1996.

[11] ———, *Guía de Problemas de Nivel Secundaria del 6° Concurso de Matemáticas Pierre Fermat,* México, E. S. F. M. del I. P. N., 1995.

CONCURSO CONCURSO

PF

PIERRE FERMAT

ESFM - IPN

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL *2016*