INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

ESCUELA SUPERIOR DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

2015, año del Generalísimo José María Morelos y Pavón

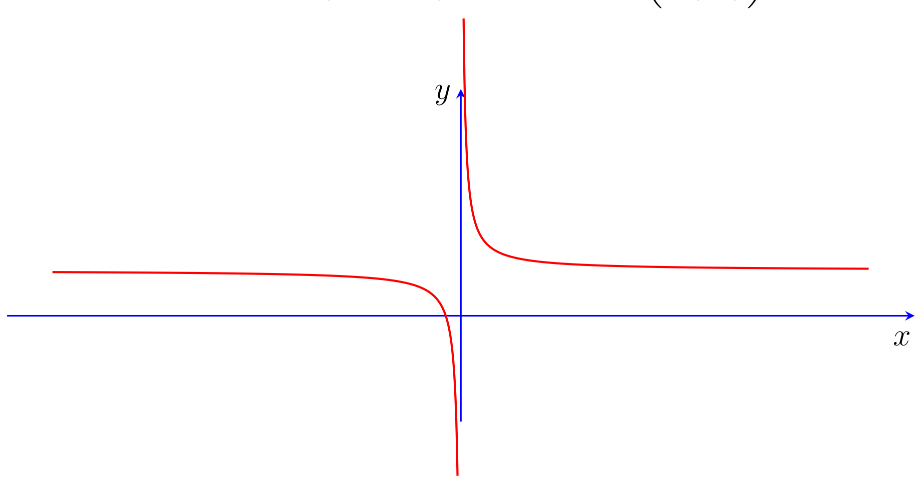
Centenario de la fundación de la ESIME

Concurso Nacional de Matemáticas

Pierre Fermat

Teorema

Toda homografía $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$, con $c\neq 0$ y $ad-cb\neq 0$, es una hipérbola equilátera con asíntotas paralelas a los ejes coordenados, $x=-\dfrac{d}{c}$, $y=\dfrac{a}{c}$ y centro en $\left(-\dfrac{d}{c},\dfrac{a}{c}\right)$.



Guía gratuita para categoría

NIVEL SECUNDARIA 2015

CONCURSO NACIONAL DE MATEMÁTICAS

Pierre Fermat

2015

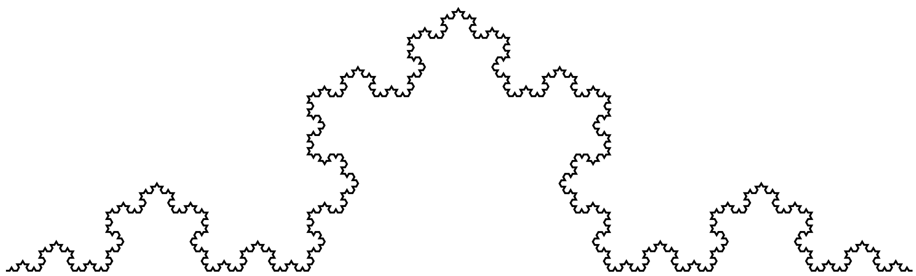
GUÍA PARA NIVEL SECUNDARIA

Patrocinado por:

Texas Instruments
Universidad Anáhuac
Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Iztapalapa
Instituto Politécnico Nacional
Global Book
Instituto Kepler
Reason Play S. A.
Lic. Jorge Jair Herrera Flores
Matedácticas

CONCURSO PIERRE FERMAT, EDICIÓN 2015

GUÍA PARA NIVEL SECUNDARIA



1. Presentación

Breve Reseña. Desde la última década del pasado siglo, el Instituto Politécnico Nacional, a través de la Escuela Superior de Física y Matemáticas (ESFM), ha organizado el Concurso Nacional de Matemáticas *"Pierre Fermat"*. Este concurso, se lleva a cabo gracias a los recursos económicos aportados por el IPN y por los generosos donativos en especie de empresas, individuos e instituciones educativas públicas y privadas de todo el territorio nacional. Mención aparte, merece el entusiasta y desinteresado apoyo que para su realización brindan trabajadores administrativos y de intendencia, profesores, alumnos y ex alumnos de la ESFM, donando parte de su valioso tiempo y trabajo para la construcción de todo el marco sustantivo del concurso, desde la elaboración de guías de estudio, impresión y aplicación de examenes, página WEB y todos esos pequeños detalles que en su conjunto dan vida al concurso, el cual se ha convertido en una huella identificatoria de la ESFM y por ende del IPN.

A manera de justificación del concurso. La ESFM, preocupada por la poca preparación matemática básica de la que hacen gala algunos alumnos de nuevo ingreso al IPN, se ha dado a la tarea de organizar el concurso Pierre Fermat, persiguiendo entre otros objetivos, el despertar el amor por

las matemáticas en los estudiantes, captar alumnos y tener un patrón de referencia de la educación matemática en México.

2. ¿Quién fue Pierre Fermat?

Pierre Fermat fue un abogado francés nacido el 17 de agosto de 1601 en Beaumont–de–Lomages, Francia, y fallecido el 12 de enero de 1665 en Castres, Francia. Fermat fue hijo de un herrero acaudalado y se benefició de una educación privilegiada vedada a gran parte del pueblo francés. Sus primeros estudios los realiza en el monasterio franciscano de Grandselve, estudiando posteriormente en la Universidad de Toulouse la carrera de leyes. Presionado por su familia, pasa a formar parte de la burocracia francesa, desempeñando por 30 años el puesto de consejero en la Cámara de las Peticiones del Parlamento de Toulouse. Por todo esto tendrá el derecho de anteponer a su apellido el artículo *"de"*, es decir, *Pierre de Fermat*.

Las matemáticas no fueron una profesión para Fermat, sino su pasatiempo o como decimos en México *"por amor al arte"*, sin embargo, sus contribuciones a las matemáticas han sido trascendentes. Fermat nunca publicó sus trabajos en vida, gran parte de estos se conocen por la comunicación epistolar que intercambiaba con matemáticos de renombre como *Mersenne*, y por la recopilación que de ellos publicaron sus hijos, cinco años después de su muerte bajo el título de *"Varia Opera Mathematica"*. Entre algunas de sus aportaciones sobresale una Geometría Analítica propuesta varios años antes que la de *Descartes*, la Teoría de Probabilidades que desarrolló con *Pascal*, el Principio de Fermat de la Óptica Geométrica, los Fundamentos del Cálculo Diferencial, diseño el método de demostración del descenso infinito, mostró el potencial de las demostración por inducción. Pero al parecer fue la Teoría de Números lo que más gustó a Fermat y fue este amor lo que le llevo a proponer lo que por casi cuatro siglos representó el sueño inalcanzable, el así llamado, *Último Teorema de Fermat* y que motivó que gran parte de la Teoría de Números Algebraicos fuese desarrollada a partir de los intentos de *Ernst Eduard Kummer* y sus contemporáneos, todo ello con el fin único de demostrar tal Teorema.

Por otra parte, este Teorema aparece en *"Varia Opera Mathematica"* sin demostración.

Para muchos de sus contemporáneos, Fermat fue un hombre de diversos matices. *Descartes* le llamó *fanfarrón*, quizá debido a su impotencia por descalificarlo en cuanto a su inteligencia y vastos conocimientos matemáticos. *Martin Mersenne*, con quien Fermat intercambiaba correspondencia, le calificaba de *el muy ilustrado hombre de Toulouse*, mientras que *Pascal*, que poseía un gran intelecto y un talento inusual para el pensamiento matemático, lo calificó como *el más grande matemático de Europa*, lo cual tal vez, molestaba a *Descartes*. *Wallis*, con quien Fermat polemizaba en cuanto a la importancia de sus resultados, se refería a él como *ese máldito francés*.

La fama de Fermat y por ende de su último Teorema, se debe a una nota marginal, manuscrita en uno de sus libros (al parecer fue en uno de los seis de los trece tomos que Fermat poseía de la obra *L' Arithmetica* recopilada por Diofanto de Alejandría) tal libro con las anotaciones de Fermat se ha perdido y sólo se sabe de su existencia por una edición de la *L' Arithmetica* publicada por Samuel Fermat, su hijo. En está edición, Samuel transcribió la nota de su padre bajo los textos griego y latino de la pregunta 8 del libro 2. La nota dice textualmente:

Obſervatio Domini Petri De Fermat

> *Cubum autem in dous cubos, aut quadrato quadratum in duos quadrato quadratos, et generaliter nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duos eiusdem nominis fas est dividere: cuius rei demostrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caparet.*[1]

La traducción aproximada es:

Observación del Señor Pierre De Fermat

[1]Existen varias versiones de esta nota en la literatura. Una de ellas aparece en **Edwards H. M.**, *Fermat's Last Theorem, a Genetic Introduction to Algebraic Number Theory*, Springer–Verlag, 1977.

> *Es imposible separar un cubo en dos cubos, o una cuarta potencia en dos cuartas potencias o en general, cualquier potencia mayor que la segunda en dos potencias similares. He descubierto una demostración verdaderamente maravillosa de esto, pero este margen es demasiado pequeño y no cabe.*

En notación matemática moderna el último Teorema de Fermat se escribe:

> Si $n \geq 3$ es un número entero, entonces la ecuación
>
> $$x^n + y^n = z^n$$
>
> no tiene soluciones enteras con $xyz \neq 0$.

En realidad, nunca sabremos qué quiso dar a entender Fermat con la críptica frase:

> *"He descubierto una demostración verdaderamente maravillosa de esto, pero este margen es demasiado pequeño y no cabe."*.

Algunos autores sostienen, que si Fermat no hubiese escrito tal frase, los matemáticos no se hubiesen empeñado tanto en demostrar su último Teorema.

3. Una "Pequeña" muestra del talento de Fermat

"Al parecer fue Fermat el verdadero inventor del cálculo diferencial"

Pierre Simon de Laplace

Una de las grandes contribuciones de Fermat, a quien con toda justicia se le podría nombrar como el *"padre de la teoría de números"*, es el resultado que actualmente se conoce como *pequeño teorema de Fermat*, y se le llama así, para distinguirlo del último teorema de Fermat. Este

pequeño teorema es una de las observaciones más brillantes que Fermat estableció para los números primos. Su descubrimiento ha tenido numerosas consecuencias en toda la teoría de números, una de ellas es la *aritmética modular* de Gauss.

Como era habitual en Fermat, el teorema lo comunicó por carta a Frénicle de Bessy el 18 de octubre de 1640, en ella Fermat no incluye la demostración por suponer que era demasiado larga, por lo demás, los destinatarios de Fermat, rara vez le exigieron demostraciones de sus resultados.[2] El teorema, escrito en el lenguaje de las congruencias ideado por Gauss, se escribe como sigue.

Pequeño Teorema de Fermat. *Sea p un número primo. Entonces, para cualquier entero a no divisible por p, se tiene que:*

$$a^{p-1} \equiv 1 \,\text{mód}\, p.$$

La demostración excede el propósito de este modesto trabajo. El lector interesado, puede consultarla en la página 51 de la obra: Felipe Zaldívar, *Introducción a la Teoría de Números,* México, Fondo de Cultura Económica, 2012. En realidad, Fermat originalmente, formuló su resultado para enteros a tales que $1 \leq a < p$ y fue Leonhard Euler, quien en 1736, dio una primera demostración que apareció publicada en las *Actas de la Academia de San Petersburgo* de 1760. A Euler también se debe su generalización que llevo a cabo en 1750. Tal generalización, se escribe, en lenguaje de congruencias, como sigue.

Teorema (de Euler). *Si a y m son enteros primos relativos, entonces*

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \text{ mód } m.$$

con, $\varphi(m) = \mathit{card}(\{z : 1 \leq z \leq m,\ z \text{ y } m \text{ primos relativos}\})$.[3]

Una de las muchas consecuencias del pequeño teorema de Fermat es una de tantas reglas de divisibilidad que aprendimos en la escuela primaria.

[2] Tomado de Blas Torrecillas Jover, *Fermat el mago de los números,* 2^a edición, España, NIVOLA, libros y ediciones, S. L., 2003.

[3] La función φ así definida se le da el nombre de **función de Euler**.

Corolario (divisibilidad por 3). Un número entero k es divisible por 3 si y sólo si la suma de sus dígitos es divisible por 3. La demostración se basa en la congruencia $10 \equiv 1 \bmod 3$ y en la expansión en base 10 del entero k. Por ejemplo, si $k = 3456444$, entonces $3+4+5+6+4+4+4 = 30$ y así $3456444 \equiv 0 \bmod 3$. Por tanto 3456444 es divisible por 3.

4. Concurso Pierre Fermat 2015

El Concurso Nacional de Matemáticas Pierre Fermat, contempla tres categorías: *Nivel Secundaria, Nivel Medio Superior* y *Nivel Superior*. Tal concurso se realizará en dos etapas: *Eliminatoria* y *Final*. La primera consiste de un examen de 25 preguntas de opción múltiple a resolverse en 3 horas. La segunda consta de un examen escrito de 5 problemas de respuesta abierta (en cada nivel), con un tiempo de 4 horas para su solución.

5. Bases del concurso

Estar inscrito durante el ciclo escolar 2014-2015 en alguna institución pública o privada dentro del país, en el nivel escolar correspondiente. No se considera límite de edad, ni semestre ó año en el que se encuentre inscrito. Se deberá presentar comprobante de estudios vigente al momento de presentar el correspondiente examen (credencial o constancia). Cada concursante, deberá inscribirse en la categoría correspondiente al nivel de estudios que este cursando a la fecha del primer examen. Consultar las fechas en las secciones 9 y 10.

6. Premios

Diploma de participación para todos los concursantes y, a su vez, se premiará cada categoría, quedando a criterio del jurado la posibilidad de declarar desierto algún lugar de cada categoría. Se tiene además, un total de al menos once menciones honoríficas. Los ganadores de cada categoría obtendrán premios en efectivo, tabletas, libros, y para los ganadores de nivel medio superior y superior habrá calculadoras.

7. Premiación

Tendrá verificativo el día 6 de noviembre de 2015 y el lugar en donde se realizará sera publicado en la página oficial del concurso. Los premios serán entregados únicamente durante la ceremonia de premiación, ya sea al ganador o a su representante.

8. Inscripciones

La inscripción al concurso es totalmente gratuita y se realizará del 1 de abril al 29 de mayo del año en curso por vía electrónica en la página web del concurso, http://esfm.ipn.mx/fermat

9. Examen de la etapa eliminatoria

Se llevara a cabo para todos los niveles, el sábado 6 de junio del año 2015 de las 10:00 a las 13:00 hrs., en la sede que corresponda a su inscripción.

10. Examen de la etapa final

Se llevara a cabo para todos los niveles, el sábado 5 de septiembre del 2015 de las 10:00 a las 14:00 hrs., en la Escuela Superior de Física y Matemáticas del I.P.N. y sedes alternas por definir.

11. Sedes

Escuela Superior de Física y Matemáticas del IPN.
Unidad Profesional *Adolfo López Mateos* del I.P.N., Edificio 9, Colonia Lindavista, C. P. 07738, Depto. de Matemáticas, México, D. F.
Tel. 57 29 60 00 ext. 55011 y 55018.
`Responsables:` Dr. José Oscar González Cervantes.
`Modalidad:` Todos los niveles.

Escuela Preparatoria Oficial No. 170.
Lomas de Murcia s/n, C. P. 55736. Coacalco, Estado de México.
Tel. 26444856.
`Responsable:` M. en C. Enrique Corona Ornelas.
`Modalidad:` Secundaria y Media Superior.

Colegio Panamericano Texcoco, Secundaria y Preparatoria S. C.
Carr. Molino de Flores, Calle Privada de Crisantemos No 3, Fracc. la Paz, Texcoco, Estado de México. Tel. (01 595) 95 51 385 ext. 104.
`Responsable:` Fís. Fernando Chávez León.
`Modalidad:` Secundaria y Medio Superior.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.
Edificios 158 y 190 Ciudad Universitaria. Avenida San Claudio y Río Verde s/n, Col. Jardines de San Manuel, Puebla, Pue. C.P. 72570.
Tel. (222) 2 29 55 00 ext. 7578.
`Responsable:` Dra. María Araceli Juárez Ramírez.
`Modalidad:` Todos los niveles.

Facultad de Matemáticas, Universidad Veracruzana.
Circuito Gonzalo Aguirre Beltrán s/n. Zona Universitaria, C. P. 91060. Xalapa, Veracruz, México. Tel. (228) 8 42 17 45, Fax (228) 1 41 10 45.
`Responsable:` Dr. Raquiel R. López Martínez.
`Modalidad:` Todos los niveles.

Colegio Juana de Arco.
Calle Abasolo No. 45. Col. Centro, Cuernavaca, Morelos.
Tel. (01-777) 312-9113
`Responsable:` Ing. Noé Jonhatan Gómez Hernández.
`Modalidad:` Todos los niveles.

Escuela el "El Peñón".
Ex-hacienda Montefalco s/n, Col. Santa Clara. Jonacatepec, Morelos.
Tel. (735)355 03 43 ext. 113
`Responsable:` Ing. Noé Jonhatan Gómez Hernández.
`Modalidad:` Todos los niveles.

Departamento de Escuela Secundaria General.
Carretera Federal Libre Tlaxcala-Puebla Km 1.5, Colonia Las Animas, Tlaxcala C. P. 90030. Tel. Oficina 01 (246) 46 2 36 00 ext. 1107.
`Responsable:` Oscar Montiel González.
`Modalidad:` Secundaria y Medio Superior.

Universidad Autónoma de Aguascalientes.
Departamento de Matemáticas y Física, edificio 26.
Av. Universidad no. 940, Ciudad Universitaria. C.P. 20100, Aguascalientes,
`Responsable:` Dr. Hugo Rodríguez Ordoñez.
`Modalidad:` Medio Superior y Superior.

Universidad Autónoma de Yucatán.
Anillo Periférico Norte, Tablaje Cat. 13615, Col. Chuburná Hidalgo Inn, Mérida Yucatán Tel. (999) 9423140 al 49.
`Responsable:` M.C.M. Reymundo Ariel Itzá Balam.
`Modalidad:` Todos los niveles.

Instituto Tecnológico de Oaxaca.
Av. Ing. Víctor Bravo Ahuja No. 125 esq. Calz. Tecnológico C. P. 68034 Oaxaca, Oax. Tel (951)5015016.
`Responsable:` Prof. Rubén Doroteo
`Modalidad:` Todos los niveles.

Instituto Tecnológico de Tlaxiaco.
Boulevard Tecnológico Km. 2.5, Llano Yosovee C. P. 69800. Tlaxiaco, Oax. Tel. Dir. (953) 55 20788, (953) 55 21322.
`Responsable:` Prof. Antonio Miguel Mendoza
`Modalidad:` Superior.

Instituto Tecnológico Superior de Perote.
Km. 2.5 Carretera Federal Perote-México C. P. 91270, Perote, Veracruz. Tel. 01(282) 825 31 50.
`Responsable:` M. en C. Fabián Valera Rivera
`Modalidad:` Todos los niveles.

Instituto Tecnológico Superior de Zacapoaxtla. Carretera Acuaco-Zacapoaxtla Km. 8, Col. Totoltepec, C. P. 73680 Zacapoaxtla, Pue. Tel. y Fax. 01 233 317 5000 ext. 310.
`Responsable:` Ing. José Luis García Arellano
`Modalidad:` Medio Superior y Superior.

Universidad del Mar (Campus Puerto Escondido).
Ciudad Universitaria, Carr. vía Sola de Vega, Puerto Escondido, San Pedro Mixtepec, Juquila, Oaxaca, México. C. P. 71980 Tel. 95458-24990, 95458-24995, 95458-24996. Fax. 95458-24992, ext. 311.
`Responsable:` Ing. Saúl Gómez Carreto.
`Modalidad:` Todos los niveles.

Universidad Tecnológica de la Mixteca.
Carretera a Acatlima Km. 2.5 C. P. 69000, Huajuapan de León, Oaxaca. Tel. 01 (953)-53-20-399 ext. 500.
`Responsable:` M. En C. Mario Lomelí Haro.
`Modalidad:` Todos Los Niveles.

Universidad Tecnológica de la Región Norte de Guerrero.
Av. Catalina Pastrana s/n, Colonia Ciudad Industrial C. P. 40030, Iguala, Guerrero. Tel-Fax. (733)3340694 y 3340695 ext. 120 Y 130.
`Responsable:` M. en C. Ernestino Alemán Mejía.
`Modalidad:` Todos los niveles.

Colegio de Estudios Científicos y Tecnológicos del Estado de México (Campus Jilotepec).
Av. Independencia s/n, 1^a manzana, Villa de Canalejas, Jilotepec Edo. de Mex., C. P. 54270, Tel. (01761) 7341697.
`Responsable:` M. en C. Virginia Garrido Adame.
`Modalidad:` Secundaria y Media Superior.

Centro de Investigación en Matemáticas, A. C.
Callejón Jalisco s/n, Col. Valenciana C. P. 36240 Guanajuato, Gto, México, Apartado Postal 402, C. P. 36000 Tel. + 52 473 732 7155 / 735 0800, Fax +52 473 732 5749
`Responsable:`
`Modalidad:` Todos los niveles.

Directorio

Enrique Fernández Fassnacht

Director General del IPN

Julio Gregorio Mendoza Álvarez

Secretario General

Miguel Ángel Álvarez Gómez

Secretario Académico

Escuela Superior de Física y Matemáticas

Adolfo Helmut Rudolf Navarro

Director

Emigdio Salazar Cordero

Subdirector Académico

Adrián Alcántar Torres

Jefe del Departamento de Matemáticas

Comité Organizador

Santiago Marcos Zepeda Martínez

Pablo Lam Estrada

José Oscar González Cervantes

Egor Maximenko

Diana Denys Jiménez Suro

Abelardo Santaella Quintas

Rubén Santos Mancio Toledo

Antonio Jesús Sánchez Hernández

Joel Pérez López

Humberto Ávila Sandoval

Información de sedes, guías, cártel y avances del concurso en:

http://esfm.ipn.mx/fermat

Dudas y comentarios en:

fermat@ipn.mx, xolocuate@yahoo.com.mx

12. Ganadores de la edición 2014 del Concurso Pierre Fermat

Superior	
Primer lugar	**Adrián Ricardo Vera Euan** Facultad de Matemáticas Universidad Autónoma de Yucatán
Segundo lugar	**José Luis Miranda Olvera** Facultad de Ciencias U.N.A.M.
Tercer lugar	**Mauricio Adrián Che Moguel** Facultad de Matemáticas Universidad Autónoma de Yucatán

Media superior	
Primer lugar	**Juan Carlos Ortíz Rhoton** Centro de Desarrollo Integral Arboledas A. C., Guadalajara
Segundo lugar	**Saúl Adrián Álvarez Tapia** ITESM, CCM
Tercer lugar	**Rodrigo Andrés Cariño Escobar** Colegio Montes de Oca Campus Tzompantle

Secundaria	
Primer lugar	**Manuel Guillermo Flota López** Colegio de San Agustín Yucatán
Segundo lugar	**Juan Carlos Castro Fernández,** Colegio Montes de Oca Campus Tzompantle
Tercer lugar	**José Manuel Tapia Avitia** Secundaria 72, Emma Godoy Nuevo Léon

13. Menciones Honoríficas de la edición 2015 del Concurso Pierre Fermat

Superior	
Oscar Cortés Cruz	Escuela Superior de Física y Matemáticas Instituto Politécnico Nacional
Francisco Gómez Hernández	Universidad Autónoma de Guanajuato
Luis Fernando Pardo Sixtos	Facultad de Ciencias U.N.A.M.
Miguel Ángel Ventura Flores	Escuela Superior de Física y Matemáticas Instituto Politécnico Nacional
Alejandro Zavaleta Flores	Universidad Autónoma Metropolitana Distrito Federal

Medio superior	
Eduardo López Romero	Preparatoria Emiliano Zapata Benemérita Universidad autónoma de Puebla
Olga Medrano Martín del Campo	Centro de Desarrollo Integral Arboledas A. C. Guadalajara

Secundaria	
Víctor Hugo Almendra Hernández	Colegio Plancarte Escudero Distrito Federal
Víctor Alonso Arano Acosta	Escuela Secundaria Particular Benigno Brito Sansores, Yucatán
Alejandro Chávez Mier	Colegio Suizo de México Distrito Federal
Jesús Dávila Sánchez	Telesecundaria Álvaro Obregón Puebla
Rodrigo Ferrer Chávez	Instituto México de Mérida Yucatán

2015, Simposio sobre Teoría Algebraica de Números en honor del 60 onomástico de la Dra. Martha Rzedowski Calderón y del Dr. Gabriel Daniel Villa Salvador

Matrimonio de prestigiosos investigadores egresados de la Escuela Superior de Física y Matemáticas

Martha y Gabriel, felicidades por su onomástico y por sus grandes logros académicos. Su destreza como investigadores solo es comparable con su alta calidad moral y su don de gentes.

Liga del simposio:

http://www.ctrl.cinvestav.mx/SiTN2015

14. Problemario

Problema 1. Construya tres fracciones racionales positivas distintas entre sí, x_1, x_2 y x_3, tales que cumplan las dos propiedades siguientes: la distancia entre x_1 y x_2 sea $3\frac{1}{2}$ unidades y la distancia entre x_1 y x_3 sea $1\frac{6}{7}$ unidades. ¿Cuáles son las posibilidades de obtener la distancia entre x_2 y x_3?

Problema 2. Calcule las sumas siguientes:

(a) $1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^4} + \cdots + \dfrac{1}{2^{100}}$.

(b) $1 - \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^4} - \cdots \pm \dfrac{1}{2^{100}}$.

¿Cuál es el signo que debe de llevar el último sumando de la suma del inciso (b)? ¿Cómo se puden expresar ambas sumas bajo el símbolo de sumatoria $\sum$?

Problema 3. Para las siguientes funciones $y = f(x)$, obtenga $y = f(0)$, $y = f(-1)$ y $y = f(-\sqrt{2})$.

(a) $y = -3x^3 + x - 1$.

(b) $y = \dfrac{x^2 + \sqrt{2}}{x - \sqrt{2}}$.

(c) $y = \ln(\sqrt{3}\, x)$.

Problema 4. Grafique las siguientes funciones, estableciendo el dominio de cada una de ellas.

(a) $y = \pi x - 1$.

(b) $y = 2x^2 - \sqrt{5}\, x + 1$.

(c) $y = \ln(x + 1)$.

Problema 5. Considere la función $y = x^3 - x + 3$. Establezca si las siguientes parejas pertenecen a la gráfica de dicha función.

(a) $(1,3)$ (b) $(0,2)$ (c) $(-6,-209)$

Problema 6. Considere la función $y = x^2 + 3x - 4$. Encuentre el número que falta en cada pareja ordenada para que dicha pareja sea parte de la gráfica de la función dada.

(a) $(4, \_\_\_)$ (b) $\left(\_\_\_\ , -\dfrac{25}{4}\right)$ (c) $(\_\_\_\ , -6{,}251)$

Problema 7. Si $f(x) = x^2 - x + 1$, entonces ¿cuáles son los números reales x's tales que la función $y = \sqrt{f(x) - 1}$ está bien definida?

Problema 8. Encuentre el conjunto solución de los sistemas de ecuaciones lineales con coeficientes reales con dos incognitas siguientes:

$$(a)\quad \begin{array}{ccccc} \frac{3}{2}\,x & - & \frac{1}{5}\,y & = & \frac{1}{2} \\ \\ -\,x & + & \frac{2}{3}\,y & = & -1 \end{array} \qquad\qquad (b)\quad \begin{array}{ccccc} \pi\,x & + & e\,y & = & \sqrt{2} \\ \\ -e\,x & - & \pi\,y & = & -\sqrt{2} \end{array}$$

Problema 9. Construya la ecuación de la recta que pasa por el punto $(-1,1)$ y que sea paralela a la recta $y = -3x - 2$.

Problema 10. Construya la ecuación de la recta que pasa por el punto $(-2,1)$ y que sea perpendicular a la recta que tiene por ecuación $-5x - y + 3 = 0$.

Problema 11. Un triángulo rectángulo $\triangle$ABC tiene por longitud en su hipotenusa x unidades y uno de sus catetos de $\sqrt{2x-1}$ unidades. ¿Cuál es la longitud del otro cateto? ¿Cómo tienen que ser los valores de x?

Problema 12. Un círculo C de radio r está centrado en el origen y su circunferencia contiene al punto $(-2,1)$. Calcule el perímetro y área del círculo.

Problema 13. Encuentre las parejas (x,y) del plano cartesiano que satisfacen:

(a) $x - y = -1$ y $xy = 1$.

(b) $x - y = 1$ y $xy = -1$.

(c) $x - y = 1$ y $xy = 1$.

Problema 14. En el plano cartesiano, localice los siguiente conjuntos:

(a) $\{(x, y) : 3y - x = 3\}$, (b) $\{(x, y) : 2y - x^2 = -1\}$;

(c) $\{(x, y) : y > x\}$, (d) $\{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$.

Problema 15. Factorice las siguientes expresiones algebraicas como un producto de dos binomios que no sean binomios conjugados.

(a) $a^{19/6}b^{3/4} - a^{5/6}b^{5/4}$, (b) $x^2y^3 - x^3y^2$.

Problema 16. Se quiere comprar una escalera de aluminio de tal manera que al soportarla sobre una pared, tenga una altura de $2\ m$ y haga un ángulo de $30°$ con relación al suelo. ¿Cuál debe de ser la longitud de la escalara? ¿Cuál debe de ser la magnitud de la máxima abertura, medida horizontalmente, que tiene la escalera con la pared?

Problema 17. Una terna **pitagórica** es una terna (a, b, c) de números enteros positivos tales que $a^2 + b^2 = c^2$. Encuentre los números enteros positivos que faltan para construir ternas pitagóricas.

(a) $(3, 4, \_\_)$ (b) $(8, \_\_, 17)$ (c) $(\_\_, 40, 41)$

¿Qué condición deben de cumplir dos enteros positivos b y c para que pueda existir un entero positivo a para que se tenga una terna pitagórica (a, b, c)?

Problema 18. Conteste las siguientes preguntas justificando sus respuestas.

(a) ¿Existe un número real x tal que $\cos^3(x) + \cos(x) = 2$?
(b) ¿Existe un número real x tal que $\ln(x) = e^x$?
(c) ¿Existe un número real x tal que $f(x) = f(x + 1)$ donde f es la función dada por $f(x) = x^2 + 1$?

Problema 19. Calcule lo que se pide.

(a) El área del trapecio que tiene en sus bases las longitudes de 4 y 7 unidades y de altura 3 unidades.
(b) La longitud de la base mayor de un trapecio si tiene área de 16 unidades cuadradas, base menor de 3 unidades y de altura 4 unidades.
(c) La longitud del lado faltante de un trapecio con base mayor de 9 unidades, base menor de 5 unidades y uno de sus lados de 5 unidades.

Problema 20. Calcule la distancia del punto $(1, 2)$ a la recta que tiene por ecuación $y = -x + 4$.

Problema 21. Resuelva lo siguiente:

(a) Establezca si la proporción $1 : 3 :: 2 : 5$ es correcta.
(b) Encuentre los valores de x que satisfagan la proporción $2 : 5 :: 3 : x^2 - x + 1$.
(c) Si en el mes de marzo de 2015 el kilogramo de manzana costaba $\$28.00$ y para el mes de abril aumentó el $25\,\%$, entonces escriba la proporción que representa este suceso.

Problema 22. ¿Existe un triángulo que tenga por longitudes en sus lados 1, 2 y 3 unidades? Justifique su respuesta.

Problema 23. Un círculo con perímetro P y área A satisfacen la relación

$$\frac{\mathsf{A} + \mathsf{P}}{2\mathsf{P}} = \frac{3}{2}\,.$$

¿Cuál es el valor del perímetro y del área del círculo?

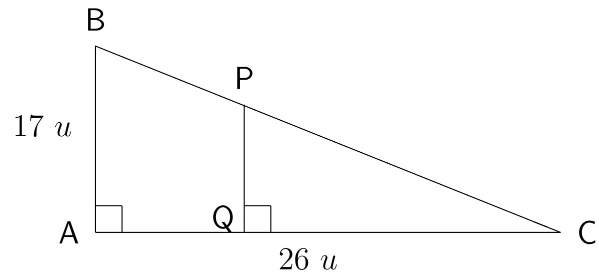
Problema 24. Dos círculos concéntricos en el origen, C_1 y C_2, tienen áreas A_1 y A_2 respectivamente, y son tales que

$$\frac{\mathsf{A}_1 + \mathsf{A}_2}{\mathsf{A}_1} = \frac{5}{2}.$$

Si el punto $\mathsf{Q} = (6, 6)$ pertenece a la circunferencia C_2 entonces obtenga las ecuaciones de ambas circunferencias. ¿Cuál circunferencia tiene mayor perímetro?

Problema 25. Considere el triángulo rectángulo $\triangle\mathsf{ABC}$, en el cual el segmento $\overline{\mathsf{BP}}$ tiene longitud un tercio de la longitud del segmento $\overline{\mathsf{BC}}$.

Supóngase que la longitud del segmento $\overline{\mathsf{AB}}$ es de 17 unidades y que la longitud del segmento $\overline{\mathsf{AC}}$ es de 26 unidades, como se muestra en la figura



Calcule el área del triángulo $\triangle$PQC.

$\beta\sigma^2\varphi$

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL 2015

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

ESCUELA SUPERIOR DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

2015, año del Generalísimo José María Morelos y Pavón

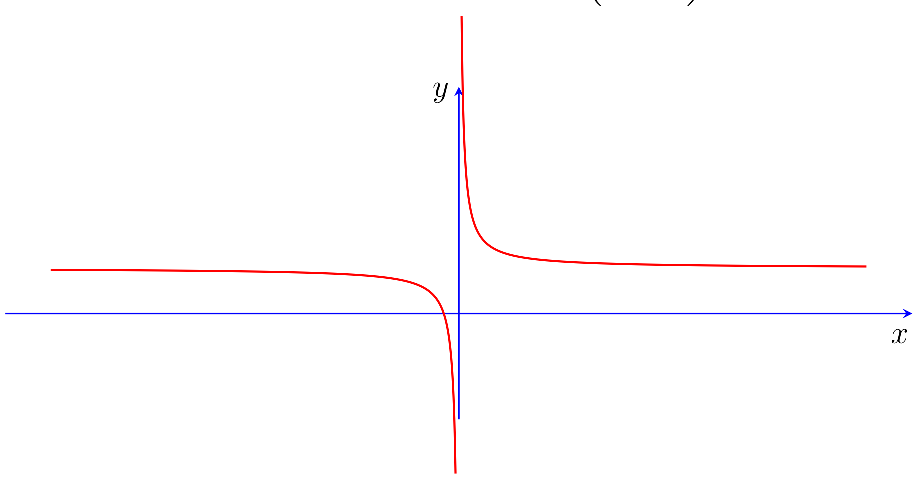
Centenario de la fundación de la ESIME

Concurso Nacional de Matemáticas

Pierre Fermat

Teorema

Toda homografía $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$, con $c\neq 0$ y $ad-cb\neq 0$, es una hipérbola equilátera con asíntotas paralelas a los ejes coordenados, $x=-\dfrac{d}{c}$, $y=\dfrac{a}{c}$ y centro en $\left(-\dfrac{d}{c},\dfrac{a}{c}\right)$.



Guía gratuita para categoría

NIVEL MEDIO SUPERIOR 2015

CONCURSO NACIONAL DE MATEMÁTICAS

Pierre Fermat

2015

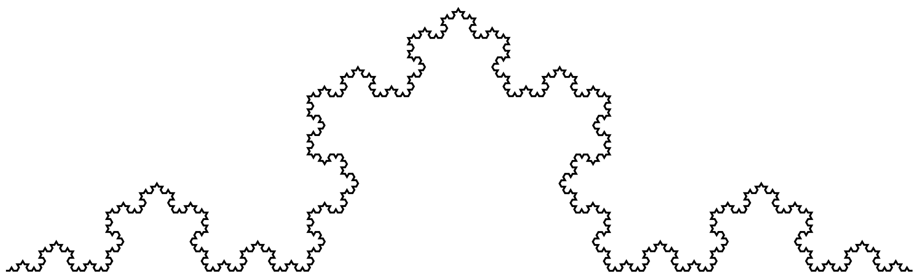
GUÍA PARA NIVEL MEDIO SUPERIOR

Patrocinado por:

Texas Instruments
Universidad Anáhuac
Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Iztapalapa
Instituto Politécnico Nacional
Global Book
Instituto Kepler
Reason Play S. A.
Lic. Jorge Jair Herrera Flores
Matedácticas

CONCURSO PIERRE FERMAT, EDICIÓN 2015

GUÍA PARA NIVEL MEDIO SUPERIOR



1. Presentación

Breve Reseña. Desde la última década del pasado siglo, el Instituto Politécnico Nacional, a través de la Escuela Superior de Física y Matemáticas (ESFM), ha organizado el Concurso Nacional de Matemáticas *"Pierre Fermat"*. Este concurso, se lleva a cabo gracias a los recursos económicos aportados por el IPN y por los generosos donativos en especie de empresas, individuos e instituciones educativas públicas y privadas de todo el territorio nacional. Mención aparte, merece el entusiasta y desinteresado apoyo que para su realización brindan trabajadores administrativos y de intendencia, profesores, alumnos y ex alumnos de la ESFM, donando parte de su valioso tiempo y trabajo para la construcción de todo el marco sustantivo del concurso, desde la elaboración de guías de estudio, impresión y aplicación de examenes, página WEB y todos esos pequeños detalles que en su conjunto dan vida al concurso, el cual se ha convertido en una huella identificatoria de la ESFM y por ende del IPN.

A manera de justificación del concurso. La ESFM, preocupada por la poca preparación matemática básica de la que hacen gala algunos alumnos de nuevo ingreso al IPN, se ha dado a la tarea de organizar el concurso Pierre Fermat, persiguiendo entre otros objetivos, el despertar el amor por

las matemáticas en los estudiantes, captar alumnos y tener un patrón de referencia de la educación matemática en México.

2. ¿Quién fue Pierre Fermat?

Pierre Fermat fue un abogado francés nacido el 17 de agosto de 1601 en Beaumont–de–Lomages, Francia, y fallecido el 12 de enero de 1665 en Castres, Francia. Fermat fue hijo de un herrero acaudalado y se benefició de una educación privilegiada vedada a gran parte del pueblo francés. Sus primeros estudios los realiza en el monasterio franciscano de Grandselve, estudiando posteriormente en la Universidad de Toulouse la carrera de leyes. Presionado por su familia, pasa a formar parte de la burocracia francesa, desempeñando por 30 años el puesto de consejero en la Cámara de las Peticiones del Parlamento de Toulouse. Por todo esto tendrá el derecho de anteponer a su apellido el artículo *"de"*, es decir, *Pierre de Fermat*.

Las matemáticas no fueron una profesión para Fermat, sino su pasatiempo o como decimos en México *"por amor al arte"*, sin embargo, sus contribuciones a las matemáticas han sido trascendentes. Fermat nunca publicó sus trabajos en vida, gran parte de estos se conocen por la comunicación epistolar que intercambiaba con matemáticos de renombre como *Mersenne*, y por la recopilación que de ellos publicaron sus hijos, cinco años después de su muerte bajo el título de *"Varia Opera Mathematica"*. Entre algunas de sus aportaciones sobresale una Geometría Analítica propuesta varios años antes que la de *Descartes*, la Teoría de Probabilidades que desarrolló con *Pascal*, el Principio de Fermat de la Óptica Geométrica, los Fundamentos del Cálculo Diferencial, diseño el método de demostración del descenso infinito, mostró el potencial de las demostración por inducción. Pero al parecer fue la Teoría de Números lo que más gustó a Fermat y fue este amor lo que le llevo a proponer lo que por casi cuatro siglos representó el sueño inalcanzable, el así llamado, *Último Teorema de Fermat* y que motivó que gran parte de la Teoría de Números Algebraicos fuese desarrollada a partir de los intentos de *Ernst Eduard Kummer* y sus contemporáneos, todo ello con el fin único de demostrar tal Teorema.

Por otra parte, este Teorema aparece en *"Varia Opera Mathematica"* sin demostración.

Para muchos de sus contemporáneos, Fermat fue un hombre de diversos matices. *Descartes* le llamó *fanfarrón*, quizá debido a su impotencia por descalificarlo en cuanto a su inteligencia y vastos conocimientos matemáticos. *Martin Mersenne*, con quien Fermat intercambiaba correspondencia, le calificaba de *el muy ilustrado hombre de Toulouse*, mientras que *Pascal*, que poseía un gran intelecto y un talento inusual para el pensamiento matemático, lo calificó como *el más grande matemático de Europa*, lo cual tal vez, molestaba a *Descartes*. *Wallis*, con quien Fermat polemizaba en cuanto a la importancia de sus resultados, se refería a él como *ese máldito francés*.

La fama de Fermat y por ende de su último Teorema, se debe a una nota marginal, manuscrita en uno de sus libros (al parecer fue en uno de los seis de los trece tomos que Fermat poseía de la obra *L' Arithmetica* recopilada por Diofanto de Alejandría) tal libro con las anotaciones de Fermat se ha perdido y sólo se sabe de su existencia por una edición de la *L' Arithmetica* publicada por Samuel Fermat, su hijo. En está edición, Samuel transcribió la nota de su padre bajo los textos griego y latino de la pregunta 8 del libro 2. La nota dice textualmente:

Observatio Domini Petri De Fermat

> *Cubum autem in dous cubos, aut quadrato quadratum in duos quadrato quadratos, et generaliter nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duos eiusdem nominis fas est dividere: cuius rei demostrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caparet.*[1]

La traducción aproximada es:

Observación del Señor Pierre De Fermat

[1]Existen varias versiones de esta nota en la literatura. Una de ellas aparece en **Edwards H. M.**, *Fermat's Last Theorem, a Genetic Introduction to Algebraic Number Theory*, Springer–Verlag, 1977.

> *Es imposible separar un cubo en dos cubos, o una cuarta potencia en dos cuartas potencias o en general, cualquier potencia mayor que la segunda en dos potencias similares. He descubierto una demostración verdaderamente maravillosa de esto, pero este margen es demasiado pequeño y no cabe.*

En notación matemática moderna el último Teorema de Fermat se escribe:

> Si $n \geq 3$ es un número entero, entonces la ecuación
> $$x^n + y^n = z^n$$
> no tiene soluciones enteras con $xyz \neq 0$.

En realidad, nunca sabremos qué quiso dar a entender Fermat con la críptica frase:

> *"He descubierto una demostración verdaderamente maravillosa de esto, pero este margen es demasiado pequeño y no cabe."*.

Algunos autores sostienen, que si Fermat no hubiese escrito tal frase, los matemáticos no se hubiesen empeñado tanto en demostrar su último Teorema.

3. Una "Pequeña" muestra del talento de Fermat

"Al parecer fue Fermat el verdadero inventor del cálculo diferencial"

Pierre Simon de Laplace

Una de las grandes contribuciones de Fermat, a quien con toda justicia se le podría nombrar como el *"padre de la teoría de números"*, es el resultado que actualmente se conoce como *pequeño teorema de Fermat*, y se le llama así, para distinguirlo del último teorema de Fermat. Este

pequeño teorema es una de las observaciones más brillantes que Fermat estableció para los números primos. Su descubrimiento ha tenido numerosas consecuencias en toda la teoría de números, una de ellas es la *aritmética modular* de Gauss.

Como era habitual en Fermat, el teorema lo comunicó por carta a Frénicle de Bessy el 18 de octubre de 1640, en ella Fermat no incluye la demostración por suponer que era demasiado larga, por lo demás, los destinatarios de Fermat, rara vez le exigieron demostraciones de sus resultados.[2] El teorema, escrito en el lenguaje de las congruencias ideado por Gauss, se escribe como sigue.

Pequeño Teorema de Fermat. *Sea p un número primo. Entonces, para cualquier entero a no divisible por p, se tiene que:*

$$a^{p-1} \equiv 1 \operatorname{mód} p.$$

La demostración excede el propósito de este modesto trabajo. El lector interesado, puede consultarla en la página 51 de la obra: Felipe Zaldívar, *Introducción a la Teoría de Números,* México, Fondo de Cultura Económica, 2012. En realidad, Fermat originalmente, formuló su resultado para enteros a tales que $1 \leq a < p$ y fue Leonhard Euler, quien en 1736, dio una primera demostración que apareció publicada en las *Actas de la Academia de San Petersburgo* de 1760. A Euler también se debe su generalización que llevo a cabo en 1750. Tal generalización, se escribe, en lenguaje de congruencias, como sigue.

Teorema (de Euler). *Si a y m son enteros primos relativos, entonces*

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \text{ mód } m.$$

con, $\varphi(m) = \mathit{card}(\{z : 1 \leq z \leq m,\ z \text{ y } m \text{ primos relativos}\})$.[3]

Una de las muchas consecuencias del pequeño teorema de Fermat es una de tantas reglas de divisibilidad que aprendimos en la escuela primaria.

---

[2] Tomado de Blas Torrecillas Jover, *Fermat el mago de los números,* 2^a edición, España, NIVOLA, libros y ediciones, S. L., 2003.

[3] La función φ así definida se le da el nombre de **función de Euler**.

Corolario (divisibilidad por 3). Un número entero k es divisible por 3 si y sólo si la suma de sus dígitos es divisible por 3. La demostración se basa en la congruencia $10 \equiv 1 \operatorname{mód} 3$ y en la expansión en base 10 del entero k. Por ejemplo, si $k = 3456444$, entonces $3+4+5+6+4+4+4 = 30$ y así $3456444 \equiv 0 \operatorname{mód} 3$. Por tanto 3456444 es divisible por 3.

4. Concurso Pierre Fermat 2015

El Concurso Nacional de Matemáticas Pierre Fermat, contempla tres categorías: *Nivel Secundaria, Nivel Medio Superior* y *Nivel Superior*. Tal concurso se realizará en dos etapas: *Eliminatoria* y *Final*. La primera consiste de un examen de 25 preguntas de opción múltiple a resolverse en 3 horas. La segunda consta de un examen escrito de 5 problemas de respuesta abierta (en cada nivel), con un tiempo de 4 horas para su solución.

5. Bases del concurso

Estar inscrito durante el ciclo escolar 2014-2015 en alguna institución pública o privada dentro del país, en el nivel escolar correspondiente. No se considera límite de edad, ni semestre ó año en el que se encuentre inscrito. Se deberá presentar comprobante de estudios vigente al momento de presentar el correspondiente examen (credencial o constancia). Cada concursante, deberá inscribirse en la categoría correspondiente al nivel de estudios que este cursando a la fecha del primer examen. Consultar las fechas en las secciones 9 y 10.

6. Premios

Diploma de participación para todos los concursantes y, a su vez, se premiará cada categoría, quedando a criterio del jurado la posibilidad de declarar desierto algún lugar de cada categoría. Se tiene además, un total de al menos once menciones honoríficas. Los ganadores de cada categoría obtendrán premios en efectivo, tabletas, libros, y para los ganadores de nivel medio superior y superior habrá calculadoras.

7. Premiación

Tendrá verificativo el día 6 de noviembre de 2015 y el lugar en donde se realizará sera publicado en la página oficial del concurso. Los premios serán entregados únicamente durante la ceremonia de premiación, ya sea al ganador o a su representante.

8. Inscripciones

La inscripción al concurso es totalmente gratuita y se realizará del 1 de abril al 29 de mayo del año en curso por vía electrónica en la página web del concurso, http://esfm.ipn.mx/fermat

9. Examen de la etapa eliminatoria

Se llevara a cabo para todos los niveles, el sábado 6 de junio del año 2015 de las 10:00 a las 13:00 hrs., en la sede que corresponda a su inscripción.

10. Examen de la etapa final

Se llevara a cabo para todos los niveles, el sábado 5 de septiembre del 2015 de las 10:00 a las 14:00 hrs., en la Escuela Superior de Física y Matemáticas del I.P.N. y sedes alternas por definir.

11. Sedes

Escuela Superior de Física y Matemáticas del IPN.
Unidad Profesional *Adolfo López Mateos* del I.P.N., Edificio 9, Colonia Lindavista, C. P. 07738, Depto. de Matemáticas, México, D. F.
Tel. 57 29 60 00 ext. 55011 y 55018.
`Responsables:` Dr. José Oscar González Cervantes.
`Modalidad:` Todos los niveles.

Escuela Preparatoria Oficial No. 170.
Lomas de Murcia s/n, C. P. 55736. Coacalco, Estado de México.
Tel. 26444856.
`Responsable:` M. en C. Enrique Corona Ornelas.
`Modalidad:` Secundaria y Media Superior.

Colegio Panamericano Texcoco, Secundaria y Preparatoria S. C.
Carr. Molino de Flores, Calle Privada de Crisantemos No 3, Fracc. la Paz, Texcoco, Estado de México. Tel. (01 595) 95 51 385 ext. 104.
`Responsable:` Fís. Fernando Chávez León.
`Modalidad:` Secundaria y Medio Superior.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.
Edificios 158 y 190 Ciudad Universitaria. Avenida San Claudio y Río Verde s/n, Col. Jardines de San Manuel, Puebla, Pue. C.P. 72570.
Tel. (222) 2 29 55 00 ext. 7578.
`Responsable:` Dra. María Araceli Juárez Ramírez.
`Modalidad:` Todos los niveles.

Facultad de Matemáticas, Universidad Veracruzana.
Circuito Gonzalo Aguirre Beltrán s/n. Zona Universitaria, C. P. 91060. Xalapa, Veracruz, México. Tel. (228) 8 42 17 45, Fax (228) 1 41 10 45.
`Responsable:` Dr. Raquiel R. López Martínez.
`Modalidad:` Todos los niveles.

Colegio Juana de Arco.
Calle Abasolo No. 45. Col. Centro, Cuernavaca, Morelos.
Tel. (01-777) 312-9113
`Responsable:` Ing. Noé Jonhatan Gómez Hernández.
`Modalidad:` Todos los niveles.

Escuela el "El Peñón".
Ex-hacienda Montefalco s/n, Col. Santa Clara. Jonacatepec, Morelos.
Tel. (735)355 03 43 ext. 113
`Responsable:` Ing. Noé Jonhatan Gómez Hernández.
`Modalidad:` Todos los niveles.

Departamento de Escuela Secundaria General.
Carretera Federal Libre Tlaxcala-Puebla Km 1.5, Colonia Las Animas, Tlaxcala C. P. 90030. Tel. Oficina 01 (246) 46 2 36 00 ext.: 1107.
`Responsable:` Oscar Montiel González.
`Modalidad:` Secundaria y Medio Superior.

Universidad Autónoma de Aguascalientes.
Departamento de Matemáticas y Física, edificio 26.
Av. Universidad no. 940, Ciudad Universitaria. C.P. 20100, Aguascalientes,
`Responsable:` Dr. Hugo Rodríguez Ordoñez.
`Modalidad:` Medio Superior y Superior.

Universidad Autónoma de Yucatán.
Anillo Periférico Norte, Tablaje Cat. 13615, Col. Chuburná Hidalgo Inn, Mérida Yucatán Tel. (999) 9423140 al 49.
`Responsable:` M.C.M. Reymundo Ariel Itzá Balam.
`Modalidad:` Todos los niveles.

Instituto Tecnológico de Oaxaca.
Av. Ing. Víctor Bravo Ahuja No. 125 esq. Calz. Tecnológico C. P. 68034 Oaxaca, Oax. Tel (951)5015016.
`Responsable:` Prof. Rubén Doroteo
`Modalidad:` Todos los niveles.

Instituto Tecnológico de Tlaxiaco.
Boulevard Tecnológico Km. 2.5, Llano Yosovee C. P. 69800. Tlaxiaco, Oax. Tel. Dir. (953) 55 20788, (953) 55 21322.
`Responsable:` Prof. Antonio Miguel Mendoza
`Modalidad:` Superior.

Instituto Tecnológico Superior de Perote.
Km. 2.5 Carretera Federal Perote-México C. P. 91270, Perote, Veracruz. Tel. 01(282) 825 31 50.
`Responsable:` M. en C. Fabián Valera Rivera
`Modalidad:` Todos los niveles.

Instituto Tecnológico Superior de Zacapoaxtla. Carretera Acuaco-Zacapoaxtla Km. 8, Col. Totoltepec, C. P. 73680 Zacapoaxtla, Pue. Tel. y Fax. 01 233 317 5000 ext. 310.
`Responsable:` Ing. José Luis García Arellano
`Modalidad:` Medio Superior y Superior.

Universidad del Mar (Campus Puerto Escondido).

Ciudad Universitaria, Carr. vía Sola de Vega, Puerto Escondido, San Pedro Mixtepec, Juquila, Oaxaca, México. C. P. 71980 Tel. 95458-24990, 95458-24995, 95458-24996. Fax. 95458-24992, ext. 311.

`Responsable:` Ing. Saúl Gómez Carreto.

`Modalidad:` Todos los niveles.

Universidad Tecnológica de la Mixteca.

Carretera a Acatlima Km. 2.5 C. P. 69000, Huajuapan de León, Oaxaca. Tel. 01 (953)-53-20-399 ext. 500.

`Responsable:` M. En C. Mario Lomelí Haro.

`Modalidad:` Todos los niveles.

Universidad Tecnológica de la Región Norte de Guerrero.

Av. Catalina Pastrana s/n, Colonia Ciudad Industrial C. P. 40030, Iguala, Guerrero. Tel-Fax. (733)3340694 y 3340695 ext. 120 Y 130.

`Responsable:` M. en C. Ernestino Alemán Mejía.

`Modalidad:` Todos los niveles.

Colegio de Estudios Científicos y Tecnológicos del Estado de México (Campus Jilotepec).

Av. Independencia s/n, 1^a manzana, Villa de Canalejas, Jilotepec Edo. de Mex., C. P. 54270, Tel. (01761) 7341697.

`Responsable:` M. en C. Virginia Garrido Adame.

`Modalidad:` Secundaria y Media Superior.

Centro de Investigación en Matemáticas, A. C.

Callejón Jalisco s/n, Col. Valenciana C. P. 36240 Guanajuato, Gto, México, Apartado Postal 402, C. P. 36000 Tel. + 52 473 732 7155 / 735 0800, Fax +52 473 732 5749

`Responsable:`

`Modalidad:` Todos los niveles.

Directorio

Enrique Fernández Fassnacht

Director General del IPN

Julio Gregorio Mendoza Álvarez

Secretario General

Miguel Ángel Álvarez Gómez

Secretario Académico

Escuela Superior de Física y Matemáticas

Adolfo Helmut Rudolf Navarro

Director

Emigdio Salazar Cordero

Subdirector Académico

Adrián Alcántar Torres

Jefe del Departamento de Matemáticas

Comité Organizador

Santiago Marcos Zepeda Martínez

Pablo Lam Estrada

José Oscar González Cervantes

Egor Maximenko

Diana Denys Jiménez Suro

Abelardo Santaella Quintas

Rubén Santos Mancio Toledo

Antonio Jesús Sánchez Hernández

Joel Pérez López

Humberto Ávila Sandoval

Información de sedes, guías, cártel y avances del concurso en:

http://esfm.ipn.mx/fermat

Dudas y comentarios en:

fermat@ipn.mx, xolocuate@yahoo.com.mx

12. Ganadores de la edición 2014 del Concurso Pierre Fermat

Superior	
Primer lugar	**Adrián Ricardo Vera Euan** Facultad de Matemáticas Universidad Autónoma de Yucatán
Segundo lugar	**José Luis Miranda Olvera** Facultad de Ciencias U.N.A.M.
Tercer lugar	**Mauricio Adrián Che Moguel** Facultad de Matemáticas Universidad Autónoma de Yucatán

Media superior	
Primer lugar	**Juan Carlos Ortíz Rhoton** Centro de Desarrollo Integral Arboledas A. C., Guadalajara
Segundo lugar	**Saúl Adrián Álvarez Tapia** ITESM, CCM
Tercer lugar	**Rodrigo Andrés Cariño Escobar** Colegio Montes de Oca Campus Tzompantle

Secundaria	
Primer lugar	**Manuel Guillermo Flota López** Colegio de San Agustín Yucatán
Segundo lugar	**Juan Carlos Castro Fernández,** Colegio Montes de Oca Campus Tzompantle
Tercer lugar	**José Manuel Tapia Avitia** Secundaria 72, Emma Godoy Nuevo Léon

13. Menciones Honoríficas de la edición 2015 del Concurso Pierre Fermat

Superior	
Oscar Cortés Cruz	Escuela Superior de Física y Matemáticas Instituto Politécnico Nacional
Francisco Gómez Hernández	Universidad Autónoma de Guanajuato
Luis Fernando Pardo Sixtos	Facultad de Ciencias U.N.A.M.
Miguel Ángel Ventura Flores	Escuela Superior de Física y Matemáticas Instituto Politécnico Nacional
Alejandro Zavaleta Flores	Universidad Autónoma Metropolitana Distrito Federal

Medio superior	
Eduardo López Romero	Preparatoria Emiliano Zapata Benemérita Universidad autónoma de Puebla
Olga Medrano Martín del Campo	Centro de Desarrollo Integral Arboledas A. C. Guadalajara

Secundaria	
Víctor Hugo Almendra Hernández	Colegio Plancarte Escudero Distrito Federal
Víctor Alonso Arano Acosta	Escuela Secundaria Particular Benigno Brito Sansores, Yucatán
Alejandro Chávez Mier	Colegio Suizo de México Distrito Federal
Jesús Dávila Sánchez	Telesecundaria Álvaro Obregón Puebla
Rodrigo Ferrer Chávez	Instituto México de Mérida Yucatán

2015, Simposio sobre Teoría Algebraica de Números en honor del 60 Onomástico de la Dra. Martha Rzedowski Calderón y del Dr. Gabriel Daniel Villa Salvador

Matrimonio de prestigiosos investigadores egresados de la Escuela Superior de Física y Matemáticas

Martha y Gabriel, felicidades por su onomástico y por sus grandes logros académicos. Su destreza como investigadores sólo es comparable con su alta calidad moral y su don de gentes.

Liga del simposio:

http://www.ctrl.cinvestav.mx/SiTN2015

14. Problemario

Problema 1. Encontrar la suma de todos los números enteros del 1 al 1×10^{11} excluyendo aquellos números que sean múltiplos de 11 y 13.

Problema 2. Demostrar que si

$$a_s k^s + a_{s-1} k^{s-1} + \cdots + a_0$$

es la representación de n en la base k, entonces $0 < n \leq k^{s+1} - 1$.

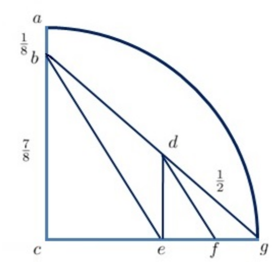
Problema 3. Demostrar que si a es un entero impar, entonces

$$a^2 + (a+2)^2 + (a+4)^2 + 1$$

es divisible por 12.

Problema 4. Demostrar que si $5 \nmid (n-1)$, $5 \nmid n$ y $5 \nmid (n+1)$, entonces $5 \mid (n^2+1)$.

Problema 5. Considérese la siguiente figura:



La distancia de a a c y de c a g en una unidad, además la distancia de b a c es $\frac{7}{8}$ de la unidad, la distancia de g a d es un medio de la unidad, el segmento de e a d es paralelo al segmento de a a c y el segmento de d a f es paralelo a segmento de b a e. Calcular la distancia de f a g.

Dibujar un segmento de tres unidades y agregar el segmento fg. Encontrar el valor de este último segmento y calcular su diferencia con π.

Problema 6. Supóngase que $\mathsf{F}_1 = 1$, $\mathsf{F}_2 = 1$, $\mathsf{F}_3 = 2$, $\mathsf{F}_4 = 3$, $\mathsf{F}_5 = 5$, en general,

$$\mathsf{F}_n = \mathsf{F}_{n-1} + \mathsf{F}_{n-2} \quad \text{para todo } n \geq 3.$$

F_n es llamado el n-**ésimo número de Fibonacci**. Demostrar las siguientes igualdades:

a) $\mathsf{F}_1 + \mathsf{F}_2 + \mathsf{F}_3 + \cdots + \mathsf{F}_n = \mathsf{F}_{n+2} - 1$

b) $\mathsf{F}_1 + \mathsf{F}_3 + \mathsf{F}_5 + \cdots + \mathsf{F}_{2n-1} = \mathsf{F}_{2n}$

c) $\mathsf{F}_2 + \mathsf{F}_4 + \mathsf{F}_6 + \cdots + \mathsf{F}_{2n} = \mathsf{F}_{2n+1} - 1$

d) $\mathsf{F}_{n+1}^2 - \mathsf{F}_n\mathsf{F}_{n+2} = (-1)^n$

e) $\mathsf{F}_1\mathsf{F}_2 + \mathsf{F}_2\mathsf{F}_3 + \mathsf{F}_3\mathsf{F}_4 + \cdots + \mathsf{F}_{2n-1}\mathsf{F}_{2n} = \mathsf{F}_{2n}^2$

f) $\mathsf{F}_1\mathsf{F}_2 + \mathsf{F}_2\mathsf{F}_3 + \mathsf{F}_3\mathsf{F}_4 + \cdots + \mathsf{F}_{2n}\mathsf{F}_{2n+1} = \mathsf{F}_{2n+1}^2 - 1$

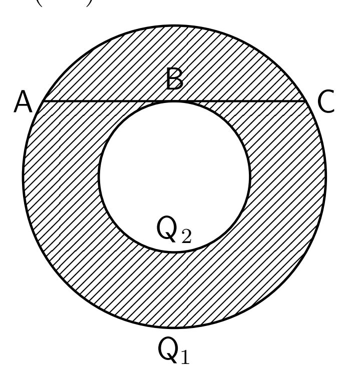
Problema 7. Si B$(9, 65)$ es el extremo derecho del segmento AB y P$(6, 44)$ es el punto medio, ¿cuáles son las coordenadas de A?

Problema 8. El triángulo $\triangle$ABC es rectángulo y dos de sus vértices son A$(-3, -3)$ y B$(11, -1)$. Encontrar el tercer vértice.

Problema 9. Se sabe que A$(5, 20)$ es un vértice de un cierto triángulo, que la distancia del origen al punto B es $\sqrt{1189}$ y que la distancia de A a B es $\sqrt{194}$. Encontrar las coordenadas del punto B.

Problema 10. Encontrar el área de la región acotada por los gráficos de las funciones $f(x) = \sqrt[3]{x}$ y $g(x) = x^3$ entre sus puntos de intersección.

Problema 11. Sean Q_1 y Q_2 dos circunferencias concéntricas y $\overline{\mathsf{AC}}$ una cuerda de Q_1 que es tangente a Q_2 en el punto B. Demostrar que el área del anillo sombreado es $\pi(\mathsf{BC})^2$.



Problema 12. Calcular el valor del siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}.$$

Problema 13. Resolver la ecuación:

$$\begin{vmatrix} 1-x & 2 & 3 \\ 1 & 2-x & 3 \\ 1 & 3 & 3-x \end{vmatrix} = 0.$$

Problema 14. Encontrar la ecuación y los elementos de la parábola que pasa por los puntos $(0,0)$, $(1,9)$ y $(-1,9)$. Encontrar los puntos sobre la parábola con abscisa 2.

Problema 15. Resolver el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= 9; \\ \log(x) - \log(y) &= 1. \end{aligned}$$

Problema 16. Resolver el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} \log\left(x^3\right) + \log\left(y^3\right) &= 15; \\ \log(x) - \log(y) &= 1. \end{aligned}$$

Problema 17. Resolver la siguiente ecuación:

$$2^{2x^2-1} - 8 = 0.$$

Problema 18. Encontrar los valores de x que satisfacen la siguiente ecuación:

$$\sqrt[2x-1]{3^{3x^2-3}} - \sqrt{27} = 0.$$

Problema 19. ¿Cuál es el valor de x que resuelve la siguiente ecuación:

$$1 + 3 + 9 + 27 + 81 + \cdots + 3^x = 29524$$

Problema 20. Calcular la siguiente integral:

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{|x| - x}\, dx.$$

Problema 21. Graficar completamente la funciones siguientes:

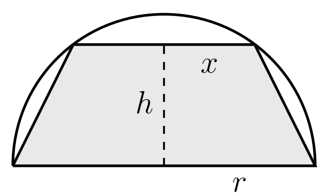
$$f(x) = x + \frac{3}{2} x^{2/3};$$

$$g(x) = x - \operatorname{sen} x;$$

$$h(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1};$$

$$\ell(x) = x^2 e^x.$$

Problema 22. Encontrar el valor de x para el cual, el área del trapecio de altura h e inscrito a la semi-circunferencia de radio r sea máxima.



Problema 23. Encontrar el número natural n, de manera que se satisfaga la siguiente igualdad:

$$\mathsf{P}(n, 2015) = 2\,\mathsf{P}(n, 2014).$$

Problema 24. ¿Cuántos triángulos se pueden formar con los vértices de un pentágono regular?

Problema 25. El polinomio $\mathsf{p}(x) = ax^2 + bx + c$, toma los valores siguientes:

x	$\mathsf{p}(x)$
-1	0
0	3
1	0

Encontrar los valores de a, b y c?

$\beta\sigma^2\varphi$

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL 2015

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

ESCUELA SUPERIOR DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

2015, año del Generalísimo José María Morelos y Pavón

Centenario de la fundación de la ESIME

Concurso Nacional de Matemáticas

Pierre Fermat

Definición

Una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ se dice que es de 1–**clase de Baire** en $[a, b]$ si existe una sucesión de funciones continuas $\{f_n\}_n$; $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que

$$f_n \xrightarrow{\text{punt}} f \quad \text{en } [a, b] \, .$$

Conjetura

Si $\mathscr{B}_1([a, b]) = \left\{ f \in \mathbb{R}^{[a,b]} : f \text{ es de } 1\text{–clase de Baire en } [a, b] \right\}$, entonces

$$card\left(\mathscr{B}_1([a, b])\right) = \mathfrak{c}.$$

Guía gratuita para categoría

NIVEL SUPERIOR 2015

CONCURSO NACIONAL DE MATEMÁTICAS

Pierre Fermat

2015

GUÍA PARA NIVEL SUPERIOR

Patrocinado por:

Texas Instruments
Universidad Anáhuac
Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Iztapalapa
Instituto Politécnico Nacional
Global Book
Instituto Kepler
Reason Play S. A.
Lic. Jorge Jair Herrera Flores
Matedácticas

CONCURSO PIERRE FERMAT, EDICIÓN 2015

GUÍA PARA NIVEL SUPERIOR

1. Presentación

Breve Reseña. Desde la última década del pasado siglo, el Instituto Politécnico Nacional, a través de la Escuela Superior de Física y Matemáticas (ESFM), ha organizado el Concurso Nacional de Matemáticas *"Pierre Fermat"*. Este concurso, se lleva a cabo gracias a los recursos económicos aportados por el IPN y por los generosos donativos en especie de empresas, individuos e instituciones educativas públicas y privadas de todo el territorio nacional. Mención aparte, merece el entusiasta y desinteresado apoyo que para su realización brindan trabajadores administrativos y de intendencia, profesores, alumnos y ex alumnos de la ESFM, donando parte de su valioso tiempo y trabajo para la construcción de todo el marco sustantivo del concurso, desde la elaboración de guías de estudio, impresión y aplicación de examenes, página WEB y todos esos pequeños detalles que en su conjunto dan vida al concurso, el cual se ha convertido en una huella identificatoria de la ESFM y por ende del IPN.

A manera de justificación del concurso. La ESFM, preocupada por la poca preparación matemática básica de la que hacen gala algunos alumnos de nuevo ingreso al IPN, se ha dado a la tarea de organizar el concurso Pierre Fermat, persiguiendo entre otros objetivos, el despertar el amor por

las matemáticas en los estudiantes, captar alumnos y tener un patrón de referencia de la educación matemática en México.

2. ¿Quién fue Pierre Fermat?

Pierre Fermat fue un abogado francés nacido el 17 de agosto de 1601 en Beaumont–de–Lomages, Francia, y fallecido el 12 de enero de 1665 en Castres, Francia. Fermat fue hijo de un herrero acaudalado y se benefició de una educación privilegiada vedada a gran parte del pueblo francés. Sus primeros estudios los realiza en el monasterio franciscano de Grandselve, estudiando posteriormente en la Universidad de Toulouse la carrera de leyes. Presionado por su familia, pasa a formar parte de la burocracia francesa, desempeñando por 30 años el puesto de consejero en la Cámara de las Peticiones del Parlamento de Toulouse. Por todo esto tendrá el derecho de anteponer a su apellido el artículo *"de"*, es decir, *Pierre de Fermat*.

Las matemáticas no fueron una profesión para Fermat, sino su pasatiempo o como decimos en México *"por amor al arte"*, sin embargo, sus contribuciones a las matemáticas han sido trascendentes. Fermat nunca publicó sus trabajos en vida, gran parte de estos se conocen por la comunicación epistolar que intercambiaba con matemáticos de renombre como *Mersenne*, y por la recopilación que de ellos publicaron sus hijos, cinco años después de su muerte bajo el título de *"Varia Opera Mathematica"*. Entre algunas de sus aportaciones sobresale una Geometría Analítica propuesta varios años antes que la de *Descartes*, la Teoría de Probabilidades que desarrolló con *Pascal*, el Principio de Fermat de la Óptica Geométrica, los Fundamentos del Cálculo Diferencial, diseño el método de demostración del descenso infinito, mostró el potencial de las demostración por inducción. Pero al parecer fue la Teoría de Números lo que más gustó a Fermat y fue este amor lo que le llevo a proponer lo que por casi cuatro siglos representó el sueño inalcanzable, el así llamado, *Último Teorema de Fermat* y que motivó que gran parte de la Teoría de Números Algebraicos fuese desarrollada a partir de los intentos de *Ernst Eduard Kummer* y sus contemporáneos, todo ello con el fin único de demostrar tal Teorema.

Por otra parte, este Teorema aparece en *"Varia Opera Mathematica"* sin demostración.

Para muchos de sus contemporáneos, Fermat fue un hombre de diversos matices. *Descartes* le llamó *fanfarrón*, quizá debido a su impotencia por descalificarlo en cuanto a su inteligencia y vastos conocimientos matemáticos. *Martin Mersenne*, con quien Fermat intercambiaba correspondencia, le calificaba de *el muy ilustrado hombre de Toulouse*, mientras que *Pascal*, que poseía un gran intelecto y un talento inusual para el pensamiento matemático, lo calificó como *el más grande matemático de Europa*, lo cual tal vez, molestaba a *Descartes*. *Wallis*, con quien Fermat polemizaba en cuanto a la importancia de sus resultados, se refería a él como *ese máldito francés*.

La fama de Fermat y por ende de su último Teorema, se debe a una nota marginal, manuscrita en uno de sus libros (al parecer fue en uno de los seis de los trece tomos que Fermat poseía de la obra *L' Arithmetica* recopilada por Diofanto de Alejandría) tal libro con las anotaciones de Fermat se ha perdido y sólo se sabe de su existencia por una edición de la *L' Arithmetica* publicada por Samuel Fermat, su hijo. En está edición, Samuel transcribió la nota de su padre bajo los textos griego y latino de la pregunta 8 del libro 2. La nota dice textualmente:

Observatio Domini Petri De Fermat

> *Cubum autem in dous cubos, aut quadrato quadratum in duos quadrato quadratos, et generaliter nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duos eiusdem nominis fas est dividere: cuius rei demostrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caparet.*[1]

La traducción aproximada es:

Observación del Señor Pierre De Fermat

[1] Existen varias versiones de esta nota en la literatura. Una de ellas aparece en **Edwards H. M.**, *Fermat's Last Theorem, a Genetic Introduction to Algebraic Number Theory*, Springer–Verlag, 1977.

> *Es imposible separar un cubo en dos cubos, o una cuarta potencia en dos cuartas potencias o en general, cualquier potencia mayor que la segunda en dos potencias similares. He descubierto una demostración verdaderamente maravillosa de esto, pero este margen es demasiado pequeño y no cabe.*

En notación matemática moderna el último Teorema de Fermat se escribe:

> Si $n \geq 3$ es un número entero, entonces la ecuación
>
> $$x^n + y^n = z^n$$
>
> no tiene soluciones enteras con $xyz \neq 0$.

En realidad, nunca sabremos qué quiso dar a entender Fermat con la críptica frase:

> *"He descubierto una demostración verdaderamente maravillosa de esto, pero este margen es demasiado pequeño y no cabe."*.

Algunos autores sostienen, que si Fermat no hubiese escrito tal frase, los matemáticos no se hubiesen empeñado tanto en demostrar su último Teorema.

3. Una "Pequeña" muestra del talento de Fermat

"Al parecer fue Fermat el verdadero inventor del cálculo diferencial"

Pierre Simon de Laplace

Una de las grandes contribuciones de Fermat, a quien con toda justicia se le podría nombrar como el *"padre de la teoría de números"*, es el resultado que actualmente se conoce como *pequeño teorema de Fermat*, y se le llama así, para distinguirlo del último teorema de Fermat. Este

pequeño teorema es una de las observaciones más brillantes que Fermat estableció para los números primos. Su descubrimiento ha tenido numerosas consecuencias en toda la teoría de números, una de ellas es la *aritmética modular* de Gauss.

Como era habitual en Fermat, el teorema lo comunicó por carta a Frénicle de Bessy el 18 de octubre de 1640, en ella Fermat no incluye la demostración por suponer que era demasiado larga, por lo demás, los destinatarios de Fermat, rara vez le exigieron demostraciones de sus resultados.[2] El teorema, escrito en el lenguaje de las congruencias ideado por Gauss, se escribe como sigue.

Pequeño Teorema de Fermat. *Sea p un número primo. Entonces, para cualquier entero a no divisible por p, se tiene que:*

$$a^{p-1} \equiv 1 \operatorname{mód} p.$$

La demostración excede el propósito de este modesto trabajo. El lector interesado, puede consultarla en la página 51 de la obra: Felipe Zaldívar, *Introducción a la Teoría de Números,* México, Fondo de Cultura Económica, 2012. En realidad, Fermat originalmente, formuló su resultado para enteros a tales que $1 \leq a < p$ y fue Leonhard Euler, quien en 1736, dio una primera demostración que apareció publicada en las *Actas de la Academia de San Petersburgo* de 1760. A Euler también se debe su generalización que llevo a cabo en 1750. Tal generalización, se escribe, en lenguaje de congruencias, como sigue.

Teorema (de Euler). *Si a y m son enteros primos relativos, entonces*

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \text{ mód } m.$$

con, $\varphi(m) = \textit{card}(\{z : 1 \leq z \leq m,\ z \text{ y } m \text{ primos relativos}\})$.[3]

Una de las muchas consecuencias del pequeño teorema de Fermat es una de tantas reglas de divisibilidad que aprendimos en la escuela primaria.

[2]Tomado de Blas Torrecillas Jover, *Fermat el mago de los números,* 2^a edición, España, NIVOLA, libros y ediciones, S. L., 2003.

[3]La función φ así definida se le da el nombre de **función de Euler**.

Corolario (divisibilidad por 3). Un número entero k es divisible por 3 si y sólo si la suma de sus dígitos es divisible por 3. La demostración se basa en la congruencia $10 \equiv 1 \mod 3$ y en la expansión en base 10 del entero k. Por ejemplo, si $k = 3456444$, entonces $3+4+5+6+4+4+4 = 30$ y así $3456444 \equiv 0 \mod 3$. Por tanto 3456444 es divisible por 3.

4. Concurso Pierre Fermat 2015

El Concurso Nacional de Matemáticas Pierre Fermat, contempla tres categorías: *Nivel Secundaria, Nivel Medio Superior* y *Nivel Superior*. Tal concurso se realizará en dos etapas: *Eliminatoria* y *Final*. La primera consiste de un examen de 25 preguntas de opción múltiple a resolverse en 3 horas. La segunda consta de un examen escrito de 5 problemas de respuesta abierta (en cada nivel), con un tiempo de 4 horas para su solución.

5. Bases del concurso

Estar inscrito durante el ciclo escolar 2014-2015 en alguna institución pública o privada dentro del país, en el nivel escolar correspondiente. No se considera límite de edad, ni semestre ó año en el que se encuentre inscrito. Se deberá presentar comprobante de estudios vigente al momento de presentar el correspondiente examen (credencial o constancia). Cada concursante, deberá inscribirse en la categoría correspondiente al nivel de estudios que este cursando a la fecha del primer examen. Consultar las fechas en las secciones 9 y 10.

6. Premios

Diploma de participación para todos los concursantes y, a su vez, se premiará cada categoría, quedando a criterio del jurado la posibilidad de declarar desierto algún lugar de cada categoría. Se tiene además, un total de al menos once menciones honoríficas. Los ganadores de cada categoría obtendrán premios en efectivo, tabletas, libros, y para los ganadores de nivel medio superior y superior habrá calculadoras.

7. Premiación

Tendrá verificativo el día 6 de noviembre de 2015 y el lugar en donde se realizará sera publicado en la página oficial del concurso. Los premios serán entregados únicamente durante la ceremonia de premiación, ya sea al ganador o a su representante.

8. Inscripciones

La inscripción al concurso es totalmente gratuita y se realizará del 1 de abril al 29 de mayo del año en curso por vía electrónica en la página web del concurso, http://esfm.ipn.mx/fermat

9. Examen de la etapa eliminatoria

Se llevara a cabo para todos los niveles, el sábado 6 de junio del año 2015 de las 10:00 a las 13:00 hrs., en la sede que corresponda a su inscripción.

10. Examen de la etapa final

Se llevara a cabo para todos los niveles, el sábado 5 de septiembre del 2015 de las 10:00 a las 14:00 hrs., en la Escuela Superior de Física y Matemáticas del I.P.N. y sedes alternas por definir.

11. Sedes

Escuela Superior de Física y Matemáticas del IPN.
Unidad Profesional *Adolfo López Mateos* del I.P.N., Edificio 9, Colonia Lindavista, C. P. 07738, Depto. de Matemáticas, México, D. F.
Tel. 57 29 60 00 ext. 55011 y 55018.
`Responsables:` Dr. José Oscar González Cervantes.
`Modalidad:` Todos los niveles.

Escuela Preparatoria Oficial No. 170.
Lomas de Murcia s/n, C. P. 55736. Coacalco, Estado de México.
Tel. 26444856.
`Responsable:` M. en C. Enrique Corona Ornelas.
`Modalidad:` Secundaria y Media Superior.

Colegio Panamericano Texcoco, Secundaria y Preparatoria S. C.
Carr. Molino de Flores, Calle Privada de Crisantemos No 3, Fracc. la Paz, Texcoco, Estado de México. Tel. (01 595) 95 51 385 ext. 104.
`Responsable:` Fís. Fernando Chávez León.
`Modalidad:` Secundaria y Medio Superior.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.
Edificios 158 y 190 Ciudad Universitaria. Avenida San Claudio y Río Verde s/n, Col. Jardines de San Manuel, Puebla, Pue. C.P. 72570.
Tel. (222) 2 29 55 00 ext. 7578.
`Responsable:` Dra. María Araceli Juárez Ramírez.
`Modalidad:` Todos los niveles.

Facultad de Matemáticas, Universidad Veracruzana.
Circuito Gonzalo Aguirre Beltrán s/n. Zona Universitaria, C. P. 91060. Xalapa, Veracruz, México. Tel. (228) 8 42 17 45, Fax (228) 1 41 10 45.
`Responsable:` Dr. Raquiel R. López Martínez.
`Modalidad:` Todos los niveles.

Colegio Juana de Arco.
Calle Abasolo No. 45. Col. Centro, Cuernavaca, Morelos.
Tel. (01-777) 312-9113
`Responsable:` Ing. Noé Jonhatan Gómez Hernández.
`Modalidad:` Todos los niveles.

Escuela el "El Peñón".
Ex-hacienda Montefalco s/n, Col. Santa Clara. Jonacatepec, Morelos.
Tel. (735)355 03 43 ext. 113
`Responsable:` Ing. Noé Jonhatan Gómez Hernández.
`Modalidad:` Todos los niveles.

Departamento de Escuela Secundaria General.
Carretera Federal Libre Tlaxcala-Puebla Km 1.5, Colonia Las Animas, Tlaxcala C. P. 90030. Tel. Oficina 01 (246) 46 2 36 00 ext. 1107.
`Responsable:` Oscar Montiel González.
`Modalidad:` Secundaria y Medio Superior.

Universidad Autónoma de Aguascalientes.
Departamento de Matemáticas y Física, edificio 26.
Av. Universidad no. 940, Ciudad Universitaria. C. P. 20100, Aguascalientes,
`Responsable:` Dr. Hugo Rodríguez Ordoñez.
`Modalidad:` Medio Superior y Superior.

Universidad Autónoma de Yucatán.
Anillo Periférico Norte, Tablaje Cat. 13615, Col. Chuburná Hidalgo Inn, Mérida Yucatán Tel. (999) 9423140 al 49.
`Responsable:` M.C.M. Reymundo Ariel Itzá Balam.
`Modalidad:` Todos los niveles.

Instituto Tecnológico de Oaxaca.
Av. Ing. Víctor Bravo Ahuja No. 125 esq. Calz. Tecnológico C. P. 68034 Oaxaca, Oax. Tel (951)5015016.
`Responsable:` Prof. Rubén Doroteo
`Modalidad:` Todos los niveles.

Instituto Tecnológico de Tlaxiaco.
Boulevard Tecnológico Km. 2.5, Llano Yosovee C. P. 69800. Tlaxiaco, Oax. Tel. Dir. (953) 55 20788, (953) 55 21322.
`Responsable:` Prof. Antonio Miguel Mendoza
`Modalidad:` Superior.

Instituto Tecnológico Superior de Perote.
Km. 2.5 Carretera Federal Perote-México C. P. 91270, Perote, Veracruz. Tel. 01(282) 825 31 50.
`Responsable:` M. en C. Fabián Valera Rivera
`Modalidad:` Todos los niveles.

Instituto Tecnológico Superior de Zacapoaxtla. Carretera Acuaco-Zacapoaxtla Km. 8, Col. Totoltepec, C. P. 73680 Zacapoaxtla, Pue. Tel. y Fax. 01 233 317 5000 ext. 310.
`Responsable:` Ing. José Luis García Arellano
`Modalidad:` Medio Superior y Superior.

Universidad del Mar (Campus Puerto Escondido).

Ciudad Universitaria, Carr. vía Sola de Vega, Puerto Escondido, San Pedro Mixtepec, Juquila, Oaxaca, México. C. P. 71980 Tel. 95458-24990, 95458-24995, 95458-24996. Fax. 95458-24992, ext. 311.

`Responsable:` Ing. Saúl Gómez Carreto.

`Modalidad:` Todos los niveles.

Universidad Tecnológica de la Mixteca.

Carretera a Acatlima Km. 2.5 C. P. 69000, Huajuapan de León, Oaxaca. Tel. 01 (953)-53-20-399 ext. 500.

`Responsable:` M. En C. Mario Lomelí Haro.

`Modalidad:` Todos Los Niveles.

Universidad Tecnológica de la Región Norte de Guerrero.

Av. Catalina Pastrana s/n, Colonia Ciudad Industrial C. P. 40030, Iguala, Guerrero. Tel-Fax. (733)3340694 y 3340695 ext. 120 Y 130.

`Responsable:` M. en C. Ernestino Alemán Mejía.

`Modalidad:` Todos los niveles.

Colegio de Estudios Científicos y Tecnológicos del Estado de México (Campus Jilotepec).

Av. Independencia s/n, 1^a manzana, Villa de Canalejas, Jilotepec Edo. de Mex., C. P. 54270, Tel. (01761) 7341697.

`Responsable:` M. en C. Virginia Garrido Adame.

`Modalidad:` Secundaria y Media Superior.

Centro de Investigación en Matemáticas, A. C.

Callejón Jalisco s/n, Col. Valenciana C. P. 36240 Guanajuato, Gto, México, Apartado Postal 402, C. P. 36000 Tel. + 52 473 732 7155 / 735 0800, Fax +52 473 732 5749

`Responsable:`

`Modalidad:` Todos los niveles.

Directorio

Enrique Fernández Fassnacht

Director General del IPN

Julio Gregorio Mendoza Álvarez

Secretario General

Miguel Ángel Álvarez Gómez

Secretario Académico

Escuela Superior de Física y Matemáticas

Adolfo Helmut Rudolf Navarro

Director

Emigdio Salazar Cordero

Subdirector Académico

Adrián Alcántar Torres

Jefe del Departamento de Matemáticas

Comité Organizador

Santiago Marcos Zepeda Martínez

Pablo Lam Estrada

José Oscar González Cervantes

Egor Maximenko

Diana Denys Jiménez Suro

Abelardo Santaella Quintas

Rubén Santos Mancio Toledo

Antonio Jesús Sánchez Hernández

Joel Pérez López

Humberto Ávila Sandoval

Información de sedes, guías, cártel y avances del concurso en:

http://esfm.ipn.mx/fermat

Dudas y comentarios en:

fermat@ipn.mx, xolocuate@yahoo.com.mx

12. Ganadores de la edición 2014 del Concurso Pierre Fermat

Superior	
Primer lugar	**Adrián Ricardo Vera Euan** Facultad de Matemáticas Universidad Autónoma de Yucatán
Segundo lugar	**José Luis Miranda Olvera** Facultad de Ciencias U.N.A.M.
Tercer lugar	**Mauricio Adrián Che Moguel** Facultad de Matemáticas Universidad Autónoma de Yucatán

Media superior	
Primer lugar	**Juan Carlos Ortíz Rhoton** Centro de Desarrollo Integral Arboledas A. C., Guadalajara
Segundo lugar	**Saúl Adrián Álvarez Tapia** ITESM, CCM
Tercer lugar	**Rodrigo Andrés Cariño Escobar** Colegio Montes de Oca Campus Tzompantle

Secundaria	
Primer lugar	**Manuel Guillermo Flota López** Colegio de San Agustín Yucatán
Segundo lugar	**Juan Carlos Castro Fernández,** Colegio Montes de Oca Campus Tzompantle
Tercer lugar	**José Manuel Tapia Avitia** Secundaria 72, Emma Godoy Nuevo Léon

13. Menciones Honoríficas de la edición 2015 del Concurso Pierre Fermat

Superior	
Oscar **Cortés Cruz**	Escuela Superior de Física y Matemáticas Instituto Politécnico Nacional
Francisco **Gómez Hernández**	Universidad Autónoma de Guanajuato
Luis Fernando **Pardo Sixtos**	Facultad de Ciencias U.N.A.M.
Miguel Ángel **Ventura Flores**	Escuela Superior de Física y Matemáticas Instituto Politécnico Nacional
Alejandro **Zavaleta Flores**	Universidad Autónoma Metropolitana Distrito Federal

Medio superior	
Eduardo **López Romero**	Preparatoria Emiliano Zapata Benemérita Universidad autónoma de Puebla
Olga **Medrano Martín del Campo**	Centro de Desarrollo Integral Arboledas A. C. Guadalajara

Secundaria	
Víctor Hugo **Almendra Hernández**	Colegio Plancarte Escudero Distrito Federal
Víctor Alonso **Arano Acosta**	Escuela Secundaria Particular Benigno Brito Sansores, Yucatán
Alejandro **Chávez Mier**	Colegio Suizo de México Distrito Federal
Jesús **Dávila Sánchez**	Telesecundaria Álvaro Obregón Puebla
Rodrigo **Ferrer Chávez**	Instituto México de Mérida Yucatán

2015, Simposio sobre Teoría Algebraica de Números en honor del 60 onomástico de la Dra. Martha Rzedowski Calderón y del Dr. Gabriel Daniel Villa Salvador

Matrimonio de prestigiosos investigadores egresados de la Escuela Superior de Física y Matemáticas

Martha y Gabriel, felicidades por su onomástico y por sus grandes logros académicos. Su destreza como investigadores solo es comparable con su alta calidad moral y su don de gentes.

Liga del simposio:

http://www.ctrl.cinvestav.mx/SiTN2015

14. Problemario

Problema 1. Si $a, b \in \mathbb{Z}$ son tales que $(a, b) = 1$, entonces demostrar que $(a + b, a^2 - ab + b^2)$ es 1 o 3.

Problema 2. Sea n un entero tal que $n \geq 12$. Demostrar que n puede ser escrito como suma de cuatros y cincos.

Problema 3. Sean A, B dos conjuntos no vacíos y C un tercer conjunto. Demostrar que si

$$(\mathsf{A} \times \mathsf{B}) \cup (\mathsf{B} \times \mathsf{A}) = \mathsf{C} \times \mathsf{C},$$

entonces $\mathsf{C} \neq \varnothing$ y $\mathsf{A} = \mathsf{B} = \mathsf{C}$.

Problema 4. Considérese cada número natural escrito en el sistema posicional de base 10. Sean $\mathcal{N} = \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $\varphi : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ la relación con regla de correspondencia:

$$\varphi(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ \text{número de decenas de } n & \text{si } n \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

(i) ¿Es φ una función de $\mathcal{N}$ a $\mathcal{N}$?

(ii) En el caso de que su respuesta al inciso (i) sea afirmativa, conteste: ¿Es φ suprayectiva, inyectiva o biyectiva?

(iii) Sea $\mathcal{D} = \{n \in \mathcal{N} : 0 \leq n \leq 120\}$. Representar geométricamente $\varphi|_{\mathcal{D}}$.

Problema 5. ¿Cuál es la solución en enteros del sistema:

$$5x - 6 > 3x - 14;$$

$$\frac{7x + 6}{2} < x + 12?$$

Problema 6. Demostrar que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \cdots & 2^{n-1} \\ 1 & 3 & 3^2 & \cdots & 3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & n & n^2 & \cdots & n^{n-1} \end{vmatrix} = 1!2!3!\cdots(n-1)!\,.$$

Problema 7. Sean $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ y $(z_n)_n$ tres sucesiones de números complejos tales que:

$$u_n = \frac{1}{2^n}\,, \quad v_n = \frac{n\pi}{3} \quad \text{y} \quad z_n = u_n e^{i v_n}\,.$$

(i) Encontrar los valores de $n \in \mathbb{N}$ para los cuales $z_n \in \mathbb{R}$.

(ii) **Demostrar o refutar**: $z_n \to 0$.

(iii) **Demostrar o refutar**: Para cada $n \in \mathbb{N}$ el triángulo $\triangle \mathsf{O} z_n z_{n+1}$ es equilátero.

(iv) Sea $(w_n)_n$ la sucesión de números reales siguiente:

$$w_n = |\, z_{n+1} - z_n \,|\,.$$

Demostrar que $(w_n)_n$ es una sucesión en progresión geométrica y encontrar su límite, si es que existe. Encontrar además, la suma de la progresión.

Problema 8. Resolver la ecuación:

$$\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c} = 0$$

y demostrar que sus raíces son siempre reales sin importar los valores de $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Problema 9. Resolver la ecuación:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{x} = \frac{1}{a+b+x}\,.$$

Problema 10. Encontrar $a \in \mathbb{R}$ de manera tal, que los polinomios

$$p\,(x) = x^2 + ax + 1;$$

$$q\,(x) = x^2 + x + a,$$

compartan una raíz.

Problema 11. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la función dada por:

$$f\,(x, y) = \left(x^2 + y^2, x^2 - y^2\right).$$

(i) Encontrar el dominio y el codominio de f.

(ii) Encontrar los dominios de continuidad, de continuidad uniforme y de diferenciabilidad de f.

(iii) Demostrar que f no es inyectiva ni suprayectiva.

(iv) Encontrar la mejor aproximación lineal afín a f, así como su función diferencial en cada punto del dominio de diferenciabilidad de f.

(v) ¿Es f un campo gradiente?

Problema 12. En el conjunto $\mathbb{R}^2$ definimos tres operaciones binarias:

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d),$$
$$(a,b)\odot(c,d)=(ac,bd),$$
$$(a,b)\times(c,d)=(ac+bd,ad+bc).$$

Demostrar que:

(i) $(\mathbb{R}^2,+,\odot)$ y $(\mathbb{R}^2,+,\times)$ son anillos conmutativos. ¿Tienen elemento identidad?

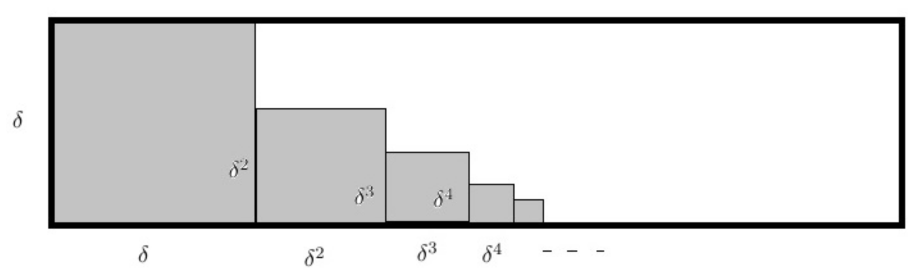
(ii) Los anillos del inciso (i) son isomorfos. Es decir, existe una biyección $\varphi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ que conserva las operaciones.

Problema 13. Sea $\mathsf{A}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz real cuadrada $n\times n$. Definimos la función $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ mediante la regla de correspondencia:

$$\varphi(x)=x^{\mathsf{T}}\mathsf{A}x,$$

donde x^{T} es el vector renglón que se obtiene al transponer el vector columna x. Calcular el gradiente de la función φ en todo punto x de su dominio de diferenciabilidad. Encontrar además la función diferencial de φ y su mejor aproximación lineal afin.

Problema 14. La figura que a continuación se muestra,



tiene las siguientes propiedades:

(i) El área total del rectángulo es 1.

(ii) $0 < \delta < 1$ y la longitud de la base del rectángulo es la suma de los lados de todos los cuadrados que se muestran.

Demostrar que la suma del area de los cuadrados es

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\dots}}}}\,.$$

Problema 15. Demostrar que para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene:

$$\int_0^x e^{-t}t^n dt = n!e^{-x}\left(e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2!} - \cdots - \frac{x^n}{n!}\right)$$

y deducir que:

$$\int_0^\infty e^{-x}x^n dx = n!\,.$$

Problema 16. ¿Existirá una familia $\mathscr{K}$ de subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$ con las propiedades siguientes:

(i) $\mathscr{K}$ sea numerable.

(ii) Cada elemento de la familia $\mathscr{K}$ sea numerable.

(iii) Cada par de elementos $\mathsf{A}_\alpha, \mathsf{A}_\beta \in \mathscr{K}$ con $\alpha \neq \beta$ cumple la condición:

$$\mathit{card}\,(\mathsf{A}_\alpha \cap \mathsf{A}_\beta) < \aleph_0?$$

Problema 17. En el conjunto de números reales $\mathbb{R}$, defínanse las siguientes operaciones:

$$r_1 \oplus r_2 = r_1 + r_2 \quad \text{para cada par de elementos } \; r_1, r_2 \in \mathbb{R},$$

$$q \odot r = qr \quad \text{para todo } \; q \in \mathbb{Q} \; \text{ y } \; \text{para todo } \; r \in \mathbb{R}.$$

(i) Demostrar que la terna $(\mathbb{R}, \oplus, \odot)$ es un $\mathbb{Q}$-espacio vectorial.

(ii) Demostrar que el conjunto $\{1, r\} \subseteq \mathbb{R}$ es libre en $\mathbb{R}$ si y sólo si $r \in \mathbb{I}$.

(iii) Deducir que $\mathit{dim}_{\mathbb{Q}}\,(\mathbb{R})$ es infinita.

(iv) ¿Cuál de las dos proposiciones siguientes es verdadera:?

(a) $\mathit{dim}_{\mathbb{Q}}\,(\mathbb{R}) = \aleph_0$.

(b) $\mathit{dim}_{\mathbb{Q}}\,(\mathbb{R}) = \mathfrak{c}$.

Justificar plenamente su respuesta.

Problema 18. Sea $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por:

$$g(x,y) = \begin{cases} \|(x,y)\| + 1 & \text{si } x - y^2 + 5 \neq 0 \\ 0 & \text{si } x - y^2 + 5 = 0 \end{cases}.$$

(i) Encontrar los dominios de definición, de continuidad y de diferenciabilidad de g.

(ii) ¿Es g diferenciable en $(0,0)$?

(iii) Si su respuesta en el inciso precedente es afirmativa, encontrar la mejor aproximación lineal afín a g en $(0,0)$, así como la función diferencial de g en $(0,0)$.

(iv) Demostrar que g tiene un mínimo local estricto en $(0,0)$ y que los puntos en donde g alcanza un mínimo local son exactamente los puntos en donde g no es diferenciable.

Problema 19. Sea $(u_n)_n$ la sucesión de números reales con término general:

$$u_n = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}.$$

(i) (a) Demostrar que $0 < u_n \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(b) Investigar la monotonía de la sucesión.

(c) Encontrar $\lim_{n\to\infty} u_n$ si es que éste existe.

(ii) Definamos una nueva sucesión $(v_n)_n$ de la manera siguiente:

$$v_n = u_1 u_2 \cdots u_n.$$

(a) Encontrar el término general de la sucesión $(v_n)_n$.

(b) Encontrar $\lim_{n\to\infty} v_n$ si es que éste existe.

(iii) Sea $(w_n)_n$ la sucesión de números reales dada por:

$$w_n = \ln(u_n).$$

(a) Demostrar que la sucesión $(w_n)_n$ es creciente y que $w_n \leq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(b) Encontrar $\lim_{n\to\infty} w_n$ si es que éste existe.

Problema 20. Demostrar que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}.$$

Problema 21. Encontrar, si es que existe, una función holomorfa

$$f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + i\,v(x,y).$$

tal que $u(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$. ¿En qué región de $\mathbb{C}$ sería válida la holomorfía de f?

Problema 22. Sea

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 13 & 14 & 4 \\ 14 & 24 & 18 \\ 4 & 18 & 29 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

la matriz de un operador lineal $\mathsf{L} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Demostrar que existe $\mathsf{B} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tal que $\mathsf{B}^2 = \mathsf{A}$. Encontrar explícitamente la matriz B.

Problema 23. Sea:

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

Demostrar que $\mathsf{B} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ conmuta con A si y sólo si B es de la forma:

$$\mathsf{B} = a\mathrm{I}_3 + b\mathsf{A} + c\mathsf{A}^2, \quad \text{para ciertos } a,b,c \in \mathbb{R}.$$

Problema 24. Sea $\mathsf{T} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ el operador lineal:

$$\mathsf{T}(x,y,z,w) = (0,x,w,0).$$

- (i) Demostrar que T es nilpotente con índice de nilpotencia igual a 2.
- (ii) Encontrar los polinomios mínimo y característico de T y de ellos deducir la forma canónica de Jordan de T.
- (iii) Encontrar la base de Jordan de $\mathbb{R}^4$.
- (iv) ¿Es T diagonalizable?.

Problema 25. Calcular la siguiente integral indefinida:

$$\int \frac{x^3\,(x^8-1)\,dx}{x^{16}+x^8+1}\,.$$

Justificar ampliamente su procedimiento.

$\beta\sigma^2\varphi$

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL 2015