Concurso Nacional Pierre Fermat 2014

Escuela Superior de Física y Matemáticas del I.P.N.

Guía para Nivel Secundaria

Problemas

Problema 1. Construya tres pares de números $\{a_1, b_1\}$, $\{a_2, b_2\}$ y $\{a_3, b_3\}$ tales que $0 < a_1 < a_3 < a_2 < c < b_3 < b_2 < b_1 < 1$, donde $c = 0.99998$.

Problema 2. Los números $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$ son números irracionales. Construya un número racional q tal que $\sqrt{2} < q < \sqrt{3}$.

Problema 3. Considere los números construídos de la siguiente forma:

$$a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_3 = \frac{a_1 + a_2}{2},\ a_4 = \frac{a_2 + a_3}{2},\ a_5 = \frac{a_3 + a_4}{2},\ \text{etc.}$$

¿Cuál es el valor del número a_{10}? ¿Existirá un número a_n $(n \in \mathbb{N})$ en la construcción que sea número irracional? Justifique sus respuestas.

Problema 4. Simplifique y/o resuelva las siguientes operaciones aritméticas:

(a) $-(-(-((-8-(-10+(-2))))))$ $\qquad$ (b) $3\pi - \dfrac{-8+\pi}{4} + \dfrac{1-\pi}{-1-\pi}$

Problema 5. Simplifique la expresión numérica:

$$\left(\frac{1}{2} - \left(\frac{3}{4} - \left(\frac{7}{6} - \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{7}{5} + \left(\frac{3}{4} - \frac{6}{5}\right)^3\right)^2\right)^3.$$

Problema 6. Encuentre el valor que debe de tomar x para cada uno de los siguientes casos:

(a) $x + 3\frac{x}{7} = \dfrac{69}{7}$, donde $3\frac{x}{7}$ es una fracción mixta (b) $\dfrac{x}{7} - \dfrac{6}{x} = \dfrac{3}{x}$.

Problema 7. Exprese los siguientes números como un producto de números primos.

(a) 2012 (b) 2013 (c) 2014 (d) 2015

Problema 8. Todo número entero **par** es de la forma $2n$ con n número entero, y todo número entero **impar** es de la forma $2m+1$ con m número entero. Por ejemplo, los números $0,\ \pm 2,\ \pm 4,\ \pm 6,\ \pm 8$, etc. son los números pares y los números $\pm 1,\ \pm 3,\ \pm 5,\ \pm 7$, etc. son los números impares. Justifique lo siguiente:

(a) La suma de dos números pares es un número par.

(b) La suma de un número par con un impar es impar.

(c) El cuadrado de un número impar es impar.

Problema 9. Todo número natural de la forma $x^2 + y^2$, donde x, y son números naturales, se dice estar expresado como **suma de dos cuadrados**. Justifique lo siguiente:

(a) La suma de dos cuadrados de dos números pares es un número par.

(b) La suma de dos cuadrados de dos números impares es un número par.

Problema 10. ¿Puede expresar el número 2014 como suma de dos cuadrados? De una justificación a su respuesta.

Problema 11. ¿Cuántos números pares hay entre los números 20152014 y 20142015, distintos de 20152014 y 20142015? ¿Puede generalizar este resultado? Es decir, si n y m son dos números enteros con $n \neq m$, ¿cuántos números pares hay entre n y m, distintos de n y m?

Problema 12. Calcule la cantidad de números naturales que contienen al número 7 como dígito en las siguientes situaciones:

(a) Entre 1 y 10;

(b) Entre 1 y 100;

(c) Entre 1 y 1000.

Problema 13. Despeje la incógnita x de la ecuación:

$$e^{(x^2-3)/2} = \frac{1}{2}\ .$$

Problema 14. Un grupo 2° "A" de estudiantes de una secundaria del Distrito Federal, se preparan para realizar un viaje de prácticas a las Pirámides de Teotihuacan. Por desgracia, no todos los estudiantes del grupo podrán realizar este viaje. Del total de estudiantes del grupo, sólo el 91 % podrá realizar dicha escursión. Los estudiantes a viajar se organizan en tres subgrupos: el 23 % de ellos llevarán las tortas de jamón, el 47 % llevará los refrescos y 13 estudiantes llevarán la fruta. ¿De cuántos alumnos está conformado el grupo 2° "A" de dicha secundaria? ¿Cuántos estudiantes irán de escursión? Obtenga la cantidad de estudiantes que corresponden al 23 % y al 47 %.

Problema 15. Se analizaron algunos precios de productos que venden dos cadenas de centros comerciales, A y B, en la Ciudad de México, para obtener la diferencia en pesos y la diferencia en porcentaje. Complete la tabla que se presenta en seguida.

Producto	**Cadena**	**Precio Mínimo**	**Cadena**	**Precio Máximo**	**Dif. en pesos**	**Dif. en porcentaje**
Lechuga romana/ 1 pza.	A	\$ 3.70	B	\$ 10.46	\$ 6.76	183 %
Jitomate saladette/ 1 kg.	A	\$ 6.57	B	\$ 16.40		
Cebolla blanca/ 1 kg.	A	\$ 6.99	B	\$ 16.40		
Aguacate hass/ 1 kg.	A	\$ 21.78	B	\$ 40.30		

Problema 16. Al igual que en el Problema 15, con respecto a las cadenas de centros comerciales, de A y de B, se tiene que la diferencia en pesos y la diferencia en porcentaje de la azucar estándar morena es \$ 8.99 y 23.10 % respectivamente. Calcule el precio mínimo y el precio máximo de la azucar.

Problema 17. Encuentre el conjunto solución de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

(a) $\begin{array}{rcrcr} 3x & - & 7y & = & 1 \\ 2x & + & 5y & = & -2 \end{array}$ $\qquad$ (b) $\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 3 \\ -5x & - & y & = & 1 \end{array}$

Problema 18. Considere los conjuntos $A = \{1, \square, 2, \diamondsuit, 3, \infty, 4\}$, $B = \{2, \infty, 4, \circ, 5, \star, 1\}$ y $C = \{5, \infty, 6, \star, 2\}$. Obtenga los siguientes conjuntos.

(a) $A \cup B$ $\qquad$ (b) $A \cap B$ $\qquad$ (c) $(A \cup C) \cap B$ $\qquad$ (d) $(A \cap B) \cup (C \cap B)$

Problema 19. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función lineal dada por $f(x) = 5 - 2x$ para cada $x \in \mathbb{R}$. Verifique lo siguiente:

(a) Si $x > 5/2$ entonces $f(x) < 0$.

(b) Si $x = 5/2$ entonces $f(x) = 0$.

(c) ¿Existe un número real a negativo tal que $f(a) = -1$?

(d) Grafíque la función f.

Problema 20. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función cuadrática dada por $f(x) = x^2 - x + 1$ para cada $x \in \mathbb{R}$. Realice lo siguiente:

(a) Calcule $f(1/2)$.

(b) Elija un elemento $x \in \mathbb{R}$ cualquier en particular (por ejemplo, $x = 387017.089$) y verifique que $f(x) \geq f(1/2)$.

(c) Se cumple que $f(x) \geq f(1/2)$ para cada $x \in \mathbb{R}$. ¿Puede justificarlo?

(d) Deduzca que $f(x) > 0$ para cada $x \in \mathbb{R}$.

(e) De un aproximación de la gráfica de la función f.

Problema 21. Si $P = (x_1, y_1)$ y $Q = (x_2, y_2)$ son dos puntos en el plano cartesiano, se tiene que la longitud del segmento $\overline{PQ}$ que une a los puntos P y Q, denotada por $|\overline{PQ}|$, está dada por la relación

$$|\overline{PQ}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Calcule las longitudes de los segmentos que unen los puntos P y Q dados como siguen:

(a) $P = (2, 0)$ y $Q = (-3, 0)$ (b) $P = (0, -5)$ y $Q = (0, 7)$

(c) $P = (-2, 3)$ y $Q = (-1, -5)$

Problema 22. Una recta L que tiene por ecuación $ax + by = c$, donde a y b son no ambos cero, intersecta a una circunferencia C con centro en el origen exactamente en uno y sólo un punto de ella, a saber: $P = (-3, 1)$. Realice lo siguiente:

(a) Establezca la ecuación de la circunferencia.

(b) De argumentos geométricos para establecer que $a \neq 0$, $b \neq 0$ y $c \neq 0$.

(c) De argumentos geométricos para establecer que $a/b < 0$.

(d) De argumentos geométricos para establecer que $c/a < 0$.

Problema 23. Verifique que los puntos $P = (0, 3)$, $Q = (0, -1)$ y $R = (\sqrt{15}/2\,, 1/2)$ del plano son los vértices de un triángulo rectángulo. ¿Cuál punto del plano soporta el ángulo recto de dicho triángulo?

Problema 24. Un círculo con perímetro P y área A satisfacen la relación $A = \sqrt{2}P$. ¿Cuál es el valor del perímetro y del área del círculo?

Problema 25. Dos cículos concentricos en el origen, C_1 y C_2, tienen áreas A_1 y A_2 respectivamente, tales que la razón $A_2/A_1 = 3$. Si el punto $Q = (6, 6)$ pertence a la circunferencia C_2 entonces obtenga las ecuaciones de ambas circunferencias.

Concurso Nacional Pierre Fermat 2014

Escuela Superior de Física y Matemáticas del I.P.N.

Guía para Nivel Medio Superior

Problema 1. Hallar $I = \displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$

Problema 2. Probar que $2^{1092} - 1$ es divisible por 1093^2.

Problema 3. Hallar todas las parejas de enteros (m, n) tal que

$$C_m^n = 1984$$

donde $C_m^n = \dfrac{m!}{n!(m-n)!}$ denota el coeficiente binomial usual.

Problema 4. Un comerciante vendió al primero de sus compradores la mitad de las naranjas más media naranja; al segundo, la mitad de las restantes más media; al tercero, la mitad de cuantas quedaron más media, etcétera. El séptimo comprador adquirió la mitad de las naranjas que quedaban más media, agotando con ello la mercancía. ¿Cuántas naranjas tenía el comerciante?

Problema 5. Hallar las ecuaciones de las dos tangentes a la elipse $4x^2 + 5y^2 = 20$ perpendiculares a $x + 3y = 3$.

Problema 6. Demostrar que para todo $n \in \mathbb{N}, a^{4n+1} - a$ es divisible por 30.

Problema 7. Sobre una colina se eleva una torre AB. En un terreno llano que se extiende al pie de la colina se sitúan dos puntos, C y D, en un mismo plano vertical con AB. La distancia entre C y D es de 200 metros. Los ángulos de elevación del pie y del extremo superior de AB, medidos desde C son, respectivamente, $25°10.2'$ y $31°4.8'$, mientras que medidos desde D son $12°57.6'$ y $17°32.3'$. Encontrar la altura de la torre.

Problema 8. Expresar: $4\cos x + 3\sin x$ en la forma $c\sin(x + \alpha)$.

Problema 9. Hallar $I = \displaystyle\int \frac{x + \sqrt{1-x^2}}{1 - x\sqrt{1-x^2}}dx$

Problema 10. Pruebe que

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{q}} \arctan \frac{2ax+b}{\sqrt{q}} + c & \text{para } q = 4ac - b^2 > 0 \\ \frac{-2}{2ax+b} + c & \text{para } q = 4ac - b^2 = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{-q}} \ln \left| \frac{2ax+b-\sqrt{-q}}{2ax+b+\sqrt{-q}} \right| + c & \text{para } q = 4ac - b^2 > 0 \end{cases}$$

Problema 11. Encuentre la ecuación de la recta que pasa por el origen y que esta a la misma distancia de los puntos (3,3), (1,-2) y (-3,1)

Problema 12. Encuentre la ecuación de la circunferencia que pasa por la mayor cantidad de puntos listados abajo y que tiene la mayor área. Puntos: (-3,3), (-9/4,7/4), (-1,-3/2), (-1/2,7/2), (7/4,3/2), (2,-5/4), (13/4,1/2) y (4,3)

Problema 13. ¿De cuántas formas se puede escribir 7800 como producto de dos factores enteros positivos ?

Problema 14. Si x, y, z son positivos con $xy = 24$, $xz = 48$, $yz = 72$, entonces $x + y + z$ a que es igual

Problema 15. Se sabe la rápidez con que se enfría un objeto esta dado por la siguiente ecuación

$$ln|T - Tm| = kt + c_1$$

donde t es el tiempo, T la temperatura, T_m la Temperatura ambiente, k y c_1 constantes. ¿Cuánto tiempo tiene que esperar una persona para tomar un café que le acaban de preparar (esta a 70°)? Si se sabe que la temperatura en la ciudad de México es de 28° y lo puede tomar a partir de los 25°

Problema 16. En una circunferencia de centro en el origen y radio 5. Si coloca un triángulo donde uno de sus vértices es (4,3). ¿Es posible elegir los otros dos vertices sobre la circunferencia de tal forma que el área sea 30?

Problema 17. Una terna pitagórica son tres números enteros (a, b, c) tales que $a^2 + b^2 = c^2$. Ahora considera la terna babilónica (x, y, z) tales que $x = 2uv$, $y = u^2 - v^2$, $z = u^2 + v^2$,siendo u y v enteros positivos y sin divisores en común. Demuestra que la terna (x, y, z) es una terna pitagórica.

Problema 18. Encuentre todas las curvas que satisfacen la siguiente igualdad

$$\int xdx = \int ydy$$

Problema 19. Encuentra el valor de b si $\displaystyle\int_{-5}^{5} f(x)dx = 0$ con $f(x) = \begin{cases} x^2 & si \quad x \leq b \\ -x & si \quad x > b \end{cases}$

Problema 20. ¿Cuál es la solución del siguiente sistema de ecuaciones?

$$\begin{aligned} x^2 + 3y^2 &= 16 \\ x^2 - y &= 4 \end{aligned}$$

Problema 21. Dado $1+2^2+3^3+4^4+\cdots+(2014)^{2014}$ ¿Cuál es el valor de las unidades?

Problema 22. Encuentre el conjunto de las x en los reales que cumplan la siguiente condición

$$\left|\frac{2x-3}{\sqrt{7-6x}}\right| < 12.$$

Problema 23. Calcule la altura de un octaedro de volúmen 1.

Problema 24. Encuentre tres números enteros $p, f, m > 1$ tales que

$$p^3 + f^3 = m^3 + 1.$$

Problema 25. ¿Cuántas soluciones diferentes tiene la siguiente ecuación $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2014$ donde los x_i's son naturales?

Concurso Nacional Pierre Fermat 2014

Escuela Superior de Física y Matemáticas del I.P.N.

Guía para Nivel Superior

Problema 1. Simplificar el siguiente polinomio (i es la unidad imaginaria):

$$\prod_{k=0}^{n-1}\left(x-\exp\frac{2k\pi\,\mathrm{i}}{n}\right).$$

Problema 2. Sean $n\in\{1,2,\ldots\}$, $t\in[0,\pi/2]$. Simplificar la suma:

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2k}\frac{(-1)^k\cos(t)^n}{\sin(t)^{2k}\cos(t)^{2k}}.$$

Problema 3. Calcular el cuadrado de la matriz S_n de tamaño $n\times n$ cuya entrada (j,k) es $sen\frac{jk\pi}{n+1}$. En otras palabras, calcular S_n^2, donde

$$S_n=\left[sen\frac{jk\pi}{n+1}\right]_{j,k=1}^{n}.$$

Problema 4. Denotemos por J_n al bloque de Jordan de orden n con entradas diagonales nulas. Calcular los valores propios de la matriz $J_n+J_n^\top$, donde $J_n^\top$ es la matriz transpuesta de J_n.

Problema 5. Sea f un polinomio de una variable real. Calcular el límite

$$\lim_{t\to+\infty}\int_0^{+\infty}t\,\mathrm{e}^{-xt}f(x)\,dx.$$

Problema 6. Sean $x>0$, $y>0$. Calcular la integral:

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-xt}-\mathrm{e}^{-yt}}{t}\,dt.$$

Problema 7. Sea $\mathcal{H}$ un espacio con producto interno. Denotemos por $\|\cdot\|$ a la norma inducida por el producto interno. Demostrar que para cualesquiera $a,b,c\in\mathcal{H}$ se cumple la *desigualdad de Ptolomeo*:

$$\|a-b\|\,\|c\|\le\|b-c\|\,\|a\|+\|c-a\|\,\|b\|.$$

Problema 8. Sea $\mathcal{H}$ un espacio con producto interno. Denotemos por $\|\cdot\|$ a la norma inducida por el producto interno. Demostrar que la función $\rho\colon \mathcal{H}\times\mathcal{H}\to\mathbb{R}$ definida mediante la siguiente regla es una métrica en $\mathcal{H}$:

$$\rho(a,b) = \begin{cases} \dfrac{\|a-b\|}{\max\{\|a\|,\|b\|\}}, & \text{si} \quad a\neq 0 \quad \text{o} \quad b\neq 0; \\ 0, & \text{si} \quad a=b=0. \end{cases}$$

Problema 9. La sucesión de Fibonacci $F_0, F_1, F_2, F_3, \ldots$ se define mediante dos valores iniciales y una fórmula recursiva:

$$F_0 = 0, \qquad F_1 = 1, \qquad F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad (n \geq 2).$$

Expresar a través de los números de Fibonacci las entradas de las matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \qquad \text{y} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n.$$

Problema 10. Sean $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Definimos $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mediante la regla

$$f(t) = \det(A + tB).$$

Demostrar que la función f es derivable en el punto 0 y calcular $f'(0)$.

Problema 11. Calcular el límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n},$$

donde la sucesión $x_0, x_1, x_2, \ldots$ está definida mediante dos valores iniciales y una fórmula recursiva:

$$x_0 = 0, \qquad x_1 = 1, \qquad x_n = 3x_{n-1} + 4x_{n-2} \quad (n \geq 2).$$

Problema 12. Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y $P : I \to \mathbb{R}$ una función. Denote:

$$A_I = \{f : I \to \mathbb{R} | f \text{ es derivable en } I\}$$

y

$$A_P = \{g : I \to \mathbb{R} | \text{ para cada } c \in I \text{ existe } \lim_{x\to c} \frac{g(x)-g(c)}{x-c} p(x)\}$$

¿Que condiciones debe cumplir la función P para que $A_I = A_P$?

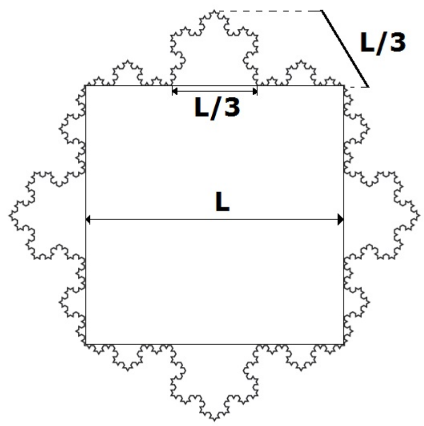
Problema 13. ¿Cuál es la relación entre la altura y los lados de un triángulo cuya área es igual a su perímetro?

Problema 14. Denotemos por α la razón dorada. Muestre que

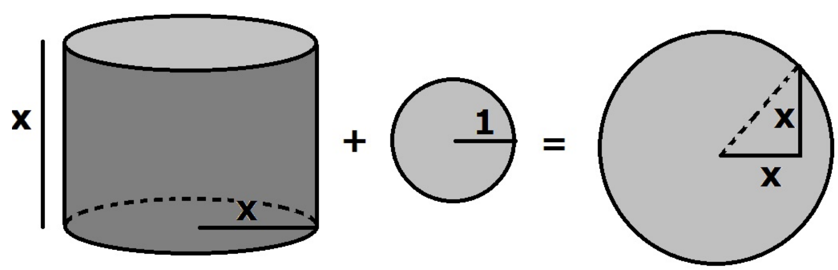
$$\int_0^\infty f = \alpha.$$

Donde $f\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ se define por trozos, a saber: para cada $n \in \{0,1,2,\ldots\}$ y cada $x \in [n, n+1)$ tomar $f(x) = \dfrac{1}{\alpha^n}$.

Problema 15. Muestre que el área de siguiente figura es $L^2[1 + \frac{\sqrt{3}}{5}]$.



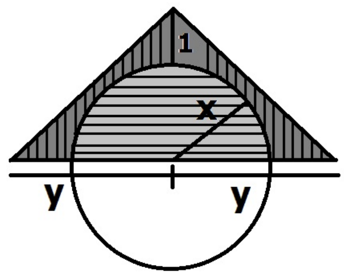
Problema 16. Muestre de acuerdo a la siguiente figura que $V + A = B$. Es decir el valor del volúmen del cilindro más el valor del área del circulo de radio 1, es igual al valor del área del circulo mostrado.



Problema 17. ¿Es cierta la siguiente igualdad?

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n(1 - cos(\frac{2\pi}{n}))}{\sqrt{2 - cos(\frac{2\pi}{n})}\sqrt{cos(\frac{2\pi}{n})}} = 2\pi.$$

Problema 18. Considere las siguientes figuras, muestre que las áreas marcadas son iguales si el triángulo es rectángulo.



Problema 19. Encuentre la recta más cercana a las siguientes rectas:

$$\begin{array}{lll} x = 5 + t, & y = 1 + 4t, & z = 3 - 2t \\ x = 2 + t, & y = 4 - 5t, & z = -3 + 4t \\ x = 6 + t, & y = 5 + 4t, & z = 1 - 2t. \end{array}$$

Problema 20. Resuelva el siguiente sistema:

$$\begin{array}{rcl} 7^{x-y} \cdot 2^x & = & 10 \\ 3^{x+y} \cdot 5^y & = & 6. \end{array}$$

Problema 21. Dado un triángulo $\triangle ABC$ y los puntos medios p en $\overline{AB}$ y r en $\overline{AC}$ ¿En que parte del lado $\overline{BC}$ debe estar s para que el perímetro de $\triangle prs$ sea mínimo?

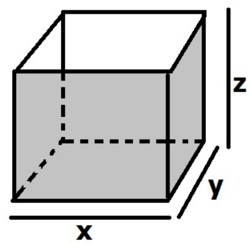
Problema 22. Considere T una transformación de Moebius $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ donde $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ y $ad - bc \neq 0$. Considere el conjunto:

$$c_T = \{z \in \mathbb{C} | T(\overline{z}) = z + 1 = 0\}$$

Muestre que c_T representa una circunferencia si $-(cT(z) - a)(cz + d) = ad - |c|^2$ para toda $z \in C_T$.

Problema 23. ¿Cuál es la ecuación de la parábola que pasa por el origen y es más cercana a los puntos $(1, 1)$, $(-1, 2)$, $(2, 3)$, $(-1/2, 4)$ y $(1, 5)$?

Problema 24. ¿Cuál es el volúmen máximo que se puede obtener al fabricar una caja a partir de una hoja cuadrada de área 25. Si se pide que el valor de $x < y < z$ (ver figura)?



Problema 25. ¿Cuál es la elipse de mayor perímetro sobre el cono circular recto de radio r y altura h, que no es tangente a la base?