PROBLEMARIO PARA NIVEL SECUNDARIA

Problema 1. Pruebe que los conjunto $\{1+\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ y $\{1+\pi^2 k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ no tienen elementos en común.

Problema 2. La expresión $a\frac{b}{c}$ nos representa una fracción mixta, donde sabemos que a, b, c son números enteros con $0 \leq b < c$. Encuentre el número entero x tal que satisfaga la ecuación

$$3\tfrac{1}{x} + 2\tfrac{1}{x^2} + \tfrac{1}{x} = 6\tfrac{x-1}{x^2} \ .$$

Problema 3. Pruebe que existen dos números enteros positivos n y m tales que $201320132013 = 20m + 13n$.

Problema 4. En el plano cartesiano se tienen dos circunferencias concéntricas de radios r y R, donde $r < R$, formando un anillo de superficie de 2π unidades cuadradas. ¿Cuáles son las medidas de los radios de las circunferencias?

Problema 5. Una recta L en el plano cartesiano pasa por el punto $(1, 2)$ y es paralela a la recta que pasa por los puntos $(2, 5)$ y $(6, 1)$. Encuentre la ecuación de la recta L.

Problema 6. Encuentre los dígitos que al ser divididos por 5 y por 3 dejan por residuos a 2 y a 1 respectivamente.

Problema 7. Factorice la expresión algebraica

$$2x^{2/3}y^{-1/2}z^{3/2} + x^{2/3}y^{-1} - x^{4/3}y^{-1/2} + x^{2/3}z^3 - x^{4/3}z^{3/2} - y^{-1}z^{3/2} - y^{-1/2}z^3.$$

Problema 8. Dos números enteros n y m satisfacen que la suma de n con el doble de m es 4, y el producto del triple de n con m es 6. Encuentre los enteros n y m.

Problema 9. Sean a y b dos números reales positivos, y considere el lugar geométrico de todas las parejas ordenadas (x, y) del plano tales que $x = a\cos\theta$ y $y = b \operatorname{sen} \theta$, donde $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Grafique este lugar geométrico en el plano y deduzca el tipo de figura que se obtiene.

Problema 10. Considere las funciones f y g de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ dadas por las relaciones $f(x) = x^3 - 2x + 1$ y $g(x) = 3x^2 + 1$ para cada $x \in \mathbb{R}$. Establezca si la relación $f(x) > g(x)$ es cierta para todo número real positivo x.

Problema 11. Justifique el hecho de que existe un ángulo θ que cumple la relación $\cos\theta = -1/2$ con $3\pi \leq \theta \leq 7\pi/2$. ¿Es cierta la afirmación pero con la relación $\cos\theta = 1/2$?

Problema 12. Sin usar calculadora, establezca que $\cos(15\pi/4) = \sqrt{2}/2$.

Problema 13. De nuevo, no use calculadora, y establezca si el número real $\cos(2012.2013\pi)$ es positivo, negativo ó cero.

Problema 14. Dos números reales x e y satisfacen que su punto medio es $(1 + \sqrt{2})/3$ y que la distancia entre ellos es de $7/2$. Encuentre los números x e y.

Problema 15. Grafique las funciones logaritmo natural, exponencial e identidad, y concluya que se debe de cumplir que para cada número real x positivo $\ln x < x < e^x$.

Problema 16. Pruebe que la desigualdad

$$\frac{x - \ln x}{x} > 1 - x + \frac{x^2 - e^x}{x}$$

es cierta.

Problema 17. Sea x un número real. Pruebe que la relación $\sqrt{1 - x} \;\geq\; \sqrt{1 + 2x}$ es cierta si y sólo si $-1/2 \leq x \leq 1$.

Problema 18. Siempre se cumple que para cada dos números reales x e y, con $x < y$, existe un número racional a tal que se encuentre entre x e y, es decir, $x < a < y$. Construya un número racioanal a con la propiedad de que a está entre los números reales $\cos(15\pi/4) + 1/3$ y $\sqrt{2}/2$.

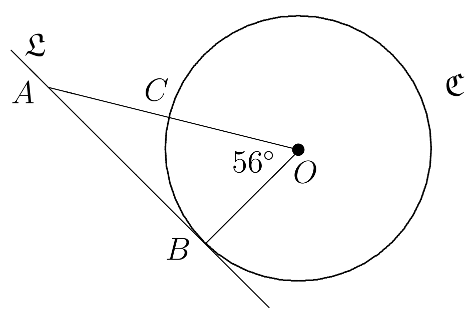
Problema 19. Un ciudadano mexicano tiene un capital de \$ 750000.00 el cual quiere invertir en CETES, fondos de inversión y en bienes y raíces. Para no arriesgar su capital, decide invertir el 72.3 % en la compra de un terreno. De lo que le queda, el 85 % lo invierte a 168 días en CETES y el resto en fondos de inversión, también dejándolos a 168 días. Si los CETES, al momento de realizar el pagaré de inversión, paga el 3.8 % anualizado con retención del 0.8 %, y de los fondos de inversión obtendrá 2.5 % de interés anual garantizado, ¿cuál es el capital que se tendrá transcurridos los 168 días?

Problema 20. Una empresa de dulces desea dar un premio a uno de sus clientes que tenga la suerte de dar de manera aproximada la cantidad de pelotas de plático de 7 centímetros de diámetro que han de llenar un recipiente cúbico de cristal de 2.5 metros de lado. Se ha de notar que al llenar el recipiente de cristal por las pelotas de plástica, habrán de quedar espacios vacíos que no podrán ser llenados por ninguna de esas pelotas. ¿Cuál será una estimación que más se aproxime a la cantidad de pelotas que habrán de llenar el recipiente cúbico de plático?

Problema 21. El volumen de un cilindro laminado es de 3 unidades cúbicas. Se observa que al tener el cilindro 1.8 unidades cúbicas de agua, ésta se encuentra a una altura de 2.3 unidades. Despreciando el grosor de la lámina, calcule las dimensiones del cilíndro.

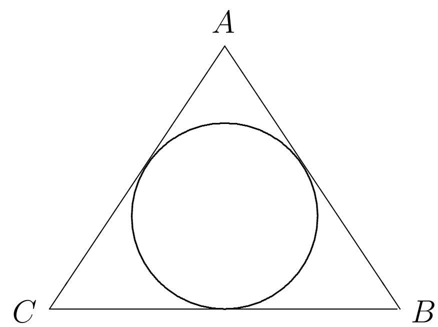
Problema 22. De las ecuaciones de dos circunferencias, una de las cuales tenga centro en el punto $(-1, 2)$ y la otra con centro en $(5, 1)$, las cuales se intersecten en un sólo punto, es decir, que estas circunferencias sean tangentes. Además, deduzca que se pueden encontrar una infinidad de pares de ecuaciones de este tipo.

Problema 23. De acuerdo con la figura de abajo, se tiene que la recta $\mathfrak{L}$ es tangente al círculo $\mathfrak{C}$, el cual es unitario. Calcule el área limitada por el arco de $\mathfrak{C}$ que une los puntos B y C, junto con los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$.



Problema 24. En el círculo unitario se pueden incribir un pentágono y un hexágono regular. Calcule la razón de sus perímetros, áreas y apotémas. ¿Cómo serán estas razones para un hexágono y un heptágono? ¿Puede obtener una fórmula en general?

Problema 25. Sea $\triangle BAC$ un triángulo equilátero de dos unidades por lado que se muestra abajo. Calcule el área del círculo que está inscrito en dicho triángulo.



Problema 1. *Sea $0 < x < n$, con $n \in \mathbb{N}$. ¿Cuál de las siguientes desigualdades es válida?*

a) $\left(\dfrac{n}{n+x}\right)^n < e^x < \left(\dfrac{n-x}{n}\right)^n$ *b)* $\left(\dfrac{n+x}{n}\right)^n < e^x < \left(\dfrac{n}{n-x}\right)^n$

c) $\left(\dfrac{n-x}{n}\right)^n < e^x < \left(\dfrac{n}{n+x}\right)^n$ *d)* $e^x < \left(\dfrac{n-x}{n}\right)^n < \left(\dfrac{n}{n+x}\right)^n$

Problema 2. *Suponga que las sucesiones de números reales $a_0, a_1, a_2, \ldots$ y $b_0, b_1, b_2, \ldots$, satisfacen la relación*

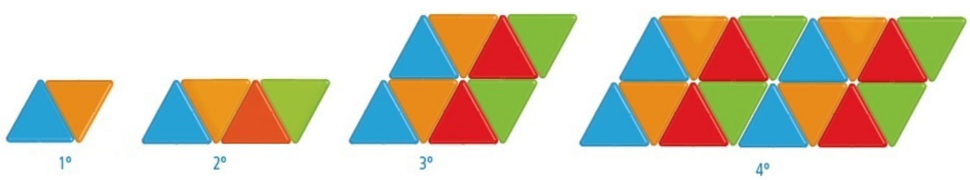
$$a_n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} b_r$$

¿Cuál de las siguientes expresiones es válida?

a) $(-1)^n b_n = \displaystyle\sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} (-1)^{s+1} a_s$ *b)* $(-1)^n b_n = \displaystyle\sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} (-1)^{s} a_s$

c) $b_n = \displaystyle\sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} (-1)^{s} a_s$ *d)* $(-1)^n b_n = \displaystyle\sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} a_s$

Problema 3. *Las siguientes figuras describen los primeros cuatro términos de una sucesión. Si la longitud del lado de cada triángulo equilátero es de una unidad. ¿Cuál es la expresión*

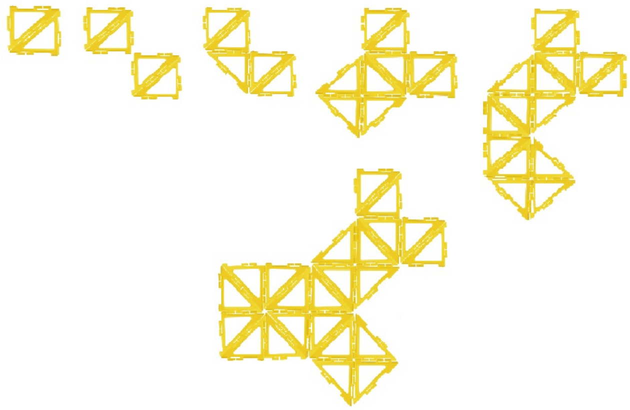


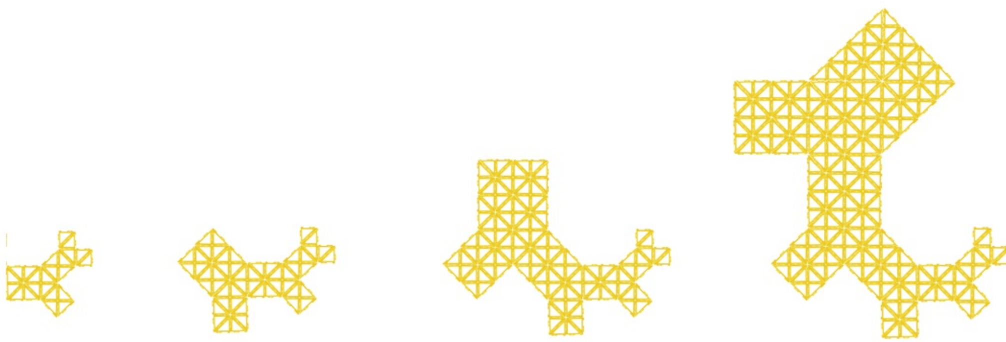
general que permite calcular el perímetro del n-ésimo término de la sucesión?

Problema 4. *Sean $n, m \in \mathbb{N}$. Demostrar que* $\dfrac{n+m}{nm-1} < 1 \;\; \forall\, n, m \geq 3$.

Problema 5. *Sea $n \in \mathbb{N}$, ¿cuál es el valor de la integral* $(-1)^n \displaystyle\int_{-1}^{1} (x^2-1)^n dx$.

Problema 6. *Considere un triángulo rectángulo isósceles cuya medida del cateto es de una unidad. Observe la contrucción de la figura siguiente. La última figura, es el primer término de la siguiente sucesión de figuras (sólo se muestran los primeros cuatro téminos de la misma): Obtener la expresión general que permite obtener el perímetro de la n-ésima figura.*





Problema 7. *Sea* (x_0, y_0) *la solución de la ecuación diofantina* $ax - by = 1$*. ¿ Cuál es el área del triángulo cuyos vértices son* $(0,0), (b,a)$ *y* (x_0, y_0)*?*

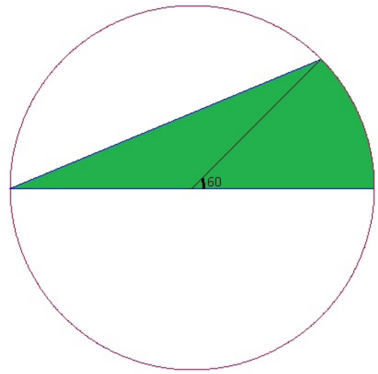
Problema 8. *Considere el cuadrado* $\square ABCD$ *cuyos lados miden 8 metros. Se dibuja un círculo que pasa por los vértices* A *y* D *y es tangente al lado* $\overline{BC}$*. ¿Cuál es el radio del círculo?*

Problema 9. *El número* 1331_b *escrito en la base entera* b*, es el cubo de un número entero para:*

Problema 10. *Un dodecagóno regular esta inscrito en un círculo de radio* r*, ¿ El área del dodecagóno en unidades cuadradas es?*

Problema 11. *¿ Cual es la solución de la ecuación* $3^x + 9^{x+1} = 81$ *?*

Problema 12. *¿ Cuál es el área de la parte sombreada de la siguiente figura?*



Problema 13. *Resuelve la siguiente ecuación* $log_2(x+1) + log_2(3x+1) = log_2(2013)$

Problema 14. *Dar solución al siguiente sistema*

$$\begin{aligned} 3^x + 5^{y+1} &= 9 \\ 3^{x-1} + 5^y &= 9 \end{aligned}$$

Problema 15. *Resolver el sistema*

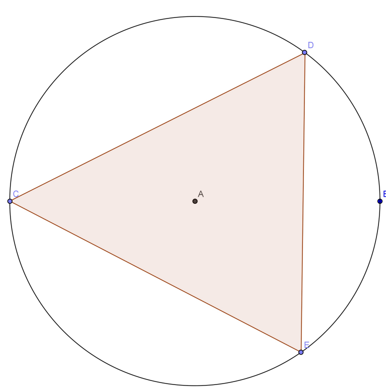
$$\begin{aligned} log(x) + log(y) &= 3 \\ x^3 + y^3 &= 7 \end{aligned}$$

Problema 16. *¿ De cuantas formas una persona puede juntar 20 pesos si sólo quiere tener monedas de 2, 5 y 10 pesos?*

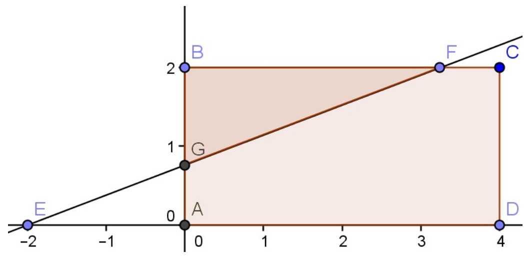
Problema 17. *Para* a, b, c *y* d *números reales, definimos* $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a * d - b * c$, *como el determinante de 2 x 2. Con los números {0,1,2,...,9}, ¿ Cuantos determinantes hay cuyo resultado sea 24?*

Problema 18. *Dos rectángulos se llaman semejantes si sus radios (lado mayor/lado menor) son iguales, ¿ Como es la relación entre las áreas de rectángulos semejantes?*

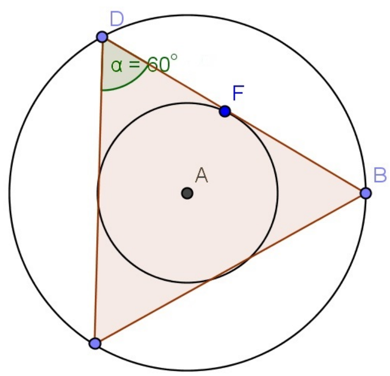
Problema 19. *Dado un círculo de radio 2, y el punto p(-2,0), ¿Donde deben estar los otros dos puntos sobre la circunferencia, para formar un triángulo equilátero?*



Problema 20. *Dada la figura, ¿ Cuales son las coordenadas del punto F, para que el area del triángulo BGF sea un cuarto de la del rectángulo ABCD?*



Problema 21. *¿Cual es la distancia entre los círculos inscrito y circunscrito a un triángulo equilátero (ver figura) ?*



Problema 22. *¿ Cuáles son las soluciones en los naturales de* $2x + 3y + 5z + 30$*?*

Problema 23. *Resolver el sistema*

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 5 \\ x - y + 5z &= 15 \\ -x + 5y + z &= 10 \end{aligned}$$

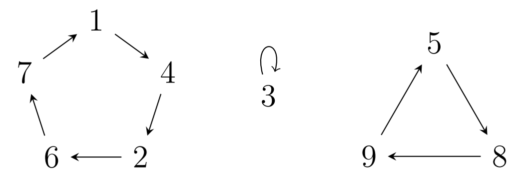
Problema 24. *¿ Cuántas palabras de longitud cinco se pueden formar con la palabra CONCURSO?*

Problema 25. *¿ Cuántas palabras de números de tamaño cuatro, se pueden formar usando los dígitos y cuya suma de y términos sea 15?*

PROBLEMARIO PARA NIVEL SUPERIOR

Problema 1. *Calcule la potencia* ϕ^{2013} *de la siguiente permutación* $\phi\colon \{1,\ldots,9\} \to \{1,\ldots,9\}$ *usando su descomposición en ciclos disjuntos:*

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 4 & 6 & 3 & 2 & 8 & 7 & 1 & 9 & 5 \end{pmatrix} =$$



Problema 2. *Sea* $\phi\colon \{1,\ldots,n\} \to \{1,\ldots,n\}$ *un permutación que se escribe como un producto de ciclos disjuntos de longitudes* $r_1,\ldots,r_k$. *Calcule el* orden *de* ϕ, *esto es, la potencia mínima positiva* p *tal que* ϕ^p *sea la permutación identidad.*

Problema 3. *Sea* P *un polinomio de grado* d *de una variable compleja y sea* n *un entero positivo,* $n > d$. *Demuestre que* $P(0)$ *es el promedio de los valores de* P *en las raíces de la unidad de orden* n*:*

$$P(0) = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} P(\omega_n^j),$$

donde $\omega_n = \exp\dfrac{2\pi\mathrm{i}}{n} = \cos\dfrac{2\pi}{n} + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\dfrac{2\pi}{n}$.

Problema 4. *Sea* a *un número real. Muestre que la ecuación* $4z^3 + 3z - a = 0$ *tiene una raíz real* z_0 *y dos raíces complejo conjugadas* z_1 *y* z_2. *Escriba* z_0, z_1, z_2 *a través de* $\cosh(\phi)$ *y* $\mathrm{senh}(\phi)$, *donde* $\phi = \frac{1}{3}\,\mathrm{arcsenh}(a)$.

Problema 5. *Sea* $a > 1$. *Muestre que la ecuación* $4z^3 - 3z - a = 0$ *tiene una raíz real* z_0 *y dos raíces complejo conjugadas* z_1 *y* z_2. *Escriba* z_0, z_1, z_2 *a través de* $\cosh(\phi)$ *y* $\mathrm{senh}(\phi)$, *donde* $\phi = \frac{1}{3}\,\mathrm{arccosh}(a)$.

Problema 6. *Sea* $-1 < a < 1$. *Muestre que la ecuación* $4z^3 - 3z + a = 0$ *tiene tres raíces reales diferentes. Exprese estas raíces a través de* $\cos(\phi)$ *y* $\mathrm{sen}(\phi)$, *donde* $\phi = \frac{1}{3}\,\mathrm{arcsen}(a)$.

Problema 7. *Sea* $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 2$. *Encuentre una función* $g_n \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ *tal que para toda función continua* $f \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ *se cumpla la igualdad*

$$\int_0^1 \int_0^{x_1} \dots \int_0^{x_{n-1}} f(x_n)\,dx_n \cdots dx_2\,dx_1 = \int_0^1 g_n(t) f(t)\,dt.$$

Problema 8. *Denotemos por* H_n *al* n*-ésimo* número armónico*:*

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Demuestre que para todo n *entero positivo,*

$$\ln(n+1) \leq H_n \leq \ln(n) + 1.$$

Sugerencia: acotar por arriba y por abajo la integral $\int_k^{k+1} f(x)\,dx$ *usando el hecho que la función* $f(x) = 1/x$ *es decreciente en el intervalo* $x > 0$.

Problema 9. *Sea* $0 < x < \pi$. *Calcule la suma de la serie*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(kx)}{k}.$$

Problema 10. *Sea* $n \in \mathbb{Z}$ *tal que* $n \geq 2$. *Demuestre que*

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{n!}.$$

Deduzca de aquí que para todo entero $n \geq 3$ *el número* $n!$ *se puede escribir como una suma de* n *sumandos enteros positivos diferentes entre sí.*

Problema 11. *Deduzca una fórmula general para el siguiente determinante de orden* n*:*

$$D(d_1, d_2, \dots, d_n, x) = \begin{vmatrix} d_1 & x & x & \dots & x & x \\ x & d_2 & x & \dots & x & x \\ x & x & d_3 & \dots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x & x & x & \dots & d_{n-1} & x \\ x & x & x & \dots & x & d_n \end{vmatrix}.$$

Problema 12. *Sea A una matriz real simétrica $n \times n$. Para todo $k \in \{1, \ldots, n\}$ denotemos por Δ_k al k-ésimo* menor principal líder *de A, es decir, al determinante de la submatriz de A ubicada en la intersección de los primeros k renglones y las primeras k columnas. Supongamos que todos estos menores son no nulos. Demuestre que el número de los valores propios negativos de A (contados con multiplicidades) es igual al número de los elementos negativos en la sucesión*

$$\Delta_1, \quad \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \quad \frac{\Delta_3}{\Delta_2}, \quad \ldots, \quad \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}.$$

Problema 13. *Sea A una matriz cuadrada compleja nilpotente (es decir, existe un $p \in \{1, 2, \ldots\}$ tal que A^p es nula) y sea $k \in \{1, 2, \ldots\}$. Calcule la traza de la matriz A^k.*

Problema 14. *Sean $f(z)$ y $g(z)$ algunas series de potencias de z tales que en una vecindad del punto 0 se cumple la igualdad $f(z)g(z) = 1$. Denotemos sus coeficientes de Taylor por $a_0, a_1, a_2, \ldots$ y $b_0, b_1, b_2, \ldots$ respectivamente:*

$$\bigl(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots\bigr)\bigl(b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots\bigr) = 1.$$

Sea n un número entero positivo. Denotemos por A_n a la matriz cuya (i, j)-ésima entrada es a_{i-j} si $i \geq j$ y es igual a 0 en otro caso. De manera similar formamos B_n de los coeficientes $b_0, b_1, \ldots$. Por ejemplo,

$$A_5 = \begin{bmatrix} a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix}, \qquad B_5 = \begin{bmatrix} b_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_0 & 0 & 0 & 0 \\ b_2 & b_1 & b_0 & 0 & 0 \\ b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & 0 \\ b_4 & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 \end{bmatrix}.$$

Calcule el producto $A_n B_n$.

Problema 15. *Sean f y g como en el problema anterior. Denotemos por C_n a la matriz cuya entrada (i, j) es igual a a_{i-j+1} si $i + 1 \geq j$ y es igual a 0 en otro caso, por ejemplo,*

$$C_4 = \begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \end{bmatrix}.$$

Exprese $\det(C_n)$ *en términos de a_0 y b_n. Sugerencia: observe que* $\det(C_n)$ *es un menor de la matriz A_{n+1} definida en el problema anterior.*

Problema 16. *Sean* $a, b \in \mathbb{Z}$. *Si* $3|a^2 + b^2$, *pruebe que* $3|a$ *y* $3|b$.

Problema 17. *Demuestre que* $\sqrt[100]{100}$ *no es un número racional.*

Problema 18. *Se definen los números de Fermat por* $F_n = 2^{2^n} + 1$, *para* $n = 0, 1, \ldots$
Si $n \neq m$, *pruebe que* $(F_n, F_m) = 1$.

Problema 19. *Encuentre el inverso multiplicativo de la clase de 29 módulo 431.*

Problema 20. *Sea* V *un espacio vectorial real de dimensión mayor o igual que 2.*
Si W_1 *y* W_2 *son subespacios propios de* V, *pruebe que* $V \neq W_1 \cup W_2$.

Problema 21. *Sea* V *un espacio vectorial real con base ordenada* $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$.
Para cada $i = 1, \ldots, n$, *se define* $\beta_i = \alpha_1 + \cdots + \alpha_i$. *Sea* $\mathcal{B} = \{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$.

1. *Demuestre que* $\mathcal{B}$ *es una base de* V.

2. *Obtenga la matriz de cambio de base de la base* $\mathcal{A}$ *a la base* $\mathcal{B}$.

Problema 22. *Sean* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *diferentes. Si*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix},$$

demuestre que A *es no singular y obtenga* A^{-1}.

Problema 23. *Sea* V *el espacio vectorial real de los polinomios con coeficientes en* $\mathbb{R}$ *de grado menor o igual a 1 en la variable* x. *Definimos* f_1 *y* f_2 *dadas por*

$$f_1(p(x)) = \int_0^1 p(x)dx \quad y \quad f_2(p(x)) = \int_0^2 p(x)dx.$$

1. *Pruebe que* $\{f_1, f_2\}$ *es una base de* V^*, *donde* V^* *es el espacio dual de* V.

2. *Encuentre la base* $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ *de* V *que es dual a la base* $\{f_1, f_2\}$.

Problema 24. *Sea* $A = \begin{pmatrix} 1+i & 1 & 1 & 1 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1+i & 1 \\ -2 & -2 & -2 & -2+i \end{pmatrix}$. *Determine:*

1. *los polinomios característico y mínimo de* A*,*
2. *los espacios propios de* A*,*
3. *la forma canónica de Jordan* J *de* A*,*

Problema 25. *Sea* $\varphi : K \to F$ *un homomorfismo de campos, es decir,*

$$\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b) \text{ y } \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b), \text{ para cada } a, b \in K.$$

Demuestre que φ *es la función cero o es inyectiva.*