Problemario Nivel Secundaria

Problema 1. Calcule la suma $1+3\frac{1}{2}+9\frac{1}{4}+\cdots+3^{100}\frac{1}{2^{100}}$, donde los números de la forma $n\frac{l}{k}$ son fracciones mixtas.

Problema 2. Lo más preciso que sea posible, grafique los siguientes números reales en la recta numérica:

(a) -36.032016 $\quad$ (b) $\dfrac{5\frac{1}{4}}{6.350014}$ $\quad$ (c) 2012.20122012

Problema 3. Para cada número real x, se define la **parte entera** de x, denotado por $\lfloor x\rfloor$, como el máximo entero que es menor ó igual que x, es decir, la parte entera de x, $\lfloor x\rfloor$, es el más grande de los enteros que satisface la relación $\lfloor x\rfloor \leq x < \lfloor x\rfloor + 1$. Calcule:

(a) $\left\lfloor -\dfrac{36.032016}{-36.032116}\right\rfloor$ $\quad$ (b) $\left\lfloor \dfrac{-5\frac{1}{5}}{6.350014}\right\rfloor$ $\quad$ (c) $\left\lfloor \dfrac{2011.20112012}{2012.20112011}\right\rfloor$

Problema 4. El **valor absoluto** de un número real a, denotado por $|a|$, se define como: $|a| = a$ si $a \geq 0$, y $|a| = -a$ si $a < 0$. Encuentre el valor absoluto de los siguientes números reales:

(a) $\left|-\dfrac{3.032016-\pi}{-36.032116}\right|$ $\quad$ (b) $\left|\dfrac{-5\cos(3\pi)}{7}\right|$ $\quad$ (c) $\left|\dfrac{e^{-2012}}{2012}\right|$

Problema 5. Si x es un número real tal que $|x-2012| < 2011$, entonces encuentre el número entero más grade n y el número entero más chico m tal que $n < x < m$.

Problema 6. Realice las siguientes operaciones:

$$(a)\quad \begin{array}{rrrrrrr} & 37 & \text{años} & 6 & \text{meses} & 28 & \text{días} \\ + & & & & & & \\ & 15 & \text{años} & 9 & \text{meses} & 5 & \text{días} \\ \hline \end{array}$$

$$(b)\quad \begin{array}{rrrrrrr} & 23 & \text{horas} & 7 & \text{minutos} & 43 & \text{segundos} \\ - & & & & & & \\ & 7 & \text{horas} & 26 & \text{minutos} & 38 & \text{segundos} \\ \hline \end{array}$$

Problema 7. Calcule la fracción en horas para el año 2012 que corresponda a la fecha 21 de diciembre a las 11 : 00 horas.

Problema 8. Verifique que

$$\pi\ (4\sqrt{e} - \pi) \leq \sqrt{e}\ (2\pi + \sqrt{e}).$$

¿Puede generalizar este resultado?

Problema 9. Encuentre la solución de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales.

$$(a) \quad \begin{array}{rcrcr} 5x & + & 6y & = & 1 \\ -x & + & 3y & = & -3 \end{array} \qquad\qquad (b) \quad \begin{array}{rcrcr} -\dfrac{2x}{7} & + & 3y & = & 6 \\ x & - & \dfrac{21y}{2} & = & 7 \end{array}$$

Problema 10. Establecer cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas ó falsas.

(a) $|\cos(\theta)| \leq 1$, para cada número real θ.

(b) $\operatorname{sen}((\theta+1)^2) = \operatorname{sen}^2(\theta) + 2\operatorname{sen}(\theta) + 1$, para cada ángulo θ.

(c) $\ln(x) < x$, para cada número real $x < 0$.

(d) Existe un número real a tal que $a^{2012} = -1$.

Problema 11. Factorice las siguientes expresiones algebraicas:

(a) $6x^2 + 6x - 12$.

(b) $x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 27x - 18$.

(c) $4x^4 + 4x^3 - 3x^2 - x - 1$.

Problema 12. Realice las operaciones que se indican:

(*a*) $\left(a^{7/6}+b^{1/3}\right)\left(a^{1/3}+b^{7/6}\right)$.

(*b*) $(z^x-1)\left(z^{2x}+z^x+1\right)$.

(*c*) $1+t^{2/3}+t^{4/3}+t^2+t^{8/3}$.

Problema 13. Factorice la expresión algebraica $x^4+2x^3-x^2+4x-6$, y encuentre los números reales a que satisfagan la ecuación $a^4+2a^3-a^2+4a-6=0$.

Problema 14. Pruebe que la ecuación cuadrática $ax^2+5x+9a=0$, con $a\neq 0$, tiene una solución real si, y sólo si $|a|\leq 5/6$.

Problema 15. Establecer cuáles de las siguientes identidades trigonométricas son correctas y cuáles no lo son:

(*a*) $\cos(2\theta)=1-2\cos^2(\theta)\tan^2(\theta)$.

(*b*) $(\cos(\theta)-\text{sen}(\theta))(\cos(\theta)+\text{sen}(\theta))=\cos(2\theta)$.

(*c*) $\cos^2(\theta)\ (1-\tan^2(\theta))=\cos(2\theta)$.

Problema 16. No use medios electrónicos, para establecer que las siguientes relaciones se cumplen:

(*a*) $\cos^2(63.345°)+\cos^2(26.655°)=1$.

(*b*) $\text{sen}^2(63.345°)+\text{sen}^2(26.655°)=1$.

(*c*) $\cos(63.345°)+\cos(26.655°)>1$.

Problema 17. Considere la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sqrt{x^2+1}$, para cada $x \in \mathbb{R}$. Calcule lo siguiente:

$$(a)\ \ f(5) \qquad (b)\ \ f(\sqrt{2}) \qquad (c)\ \ f(-\pi) \qquad (d)\ \ f(\ln(|x|+1)).$$

Problema 18. Supóngase que f es una función real de variable real determinada por la correspondencia $x \longmapsto y = f(x)$. Así que, un número real a podrá pertenecer al **dominio** de la función f, si la relación $y = f(a)$ está bien determinada. Por ejemplo, si $y = 1/(x-1)$, entonces el valor $a = 2$ podrá pertenecer el dominio de la función, mientras que no será así para $b = 1$.
Encuentre el subconjunto más grande de los números reales que definen dominios de funciones para las siguientes relaciones:

$$(a)\ \ y = \sqrt{x^2-2} \qquad (b)\ \ z = \ln(x^4-1) \qquad (c)\ \ w = \frac{z^2-1}{z+1}.$$

Problema 19. Considere el conjunto $\mathfrak{I}$ de todos los triángulos isóceles que tienen base una longitud fija de 10 unidades. (Por supuesto, sus otros dos lados son los que tienen la misma longitud.) Supóngase que la correspondencia $x \longmapsto A(x)$, determina una función real de variable real, la cual establece el área de cada elemento de $\mathfrak{I}$. Si se tiene la relación $A(x) = \sqrt{\ln(x-1)+3}$, encuentre el valor de x cuyo elemento de $\mathfrak{I}$ tenga área 10 unidades cuadradas. ¿Puede observar que se tiene una correspondencia entre los elementos del dominio de la función y los elementos de $\mathfrak{I}$? Si es así, ¿cómo está dada la correspondencia?

Problema 20. Construye una correspondencia en la que se pueda calcular el volumen de un cilíndro con base fija de 20 unidades cuadradas.

Problema 21. Las gráficas de las rectas $y = 5x+3$ e $y = -x+4$ tienen un punto de intersección en el plano cartesiano, el cual es centro de una circunferencia C de diámetro 5 unidades. ¿Cuántos puntos de cada recta se encuentran en la circunferencia C? ¿Cuáles son?

Problema 22. Es posible que en alguna ocación se le haya presentado el siguiente juego de azar: Considere el conjunto de dígitos $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$, en el que cada dígito habrá de ocupar un lugar en la siguiente tabla:

de tal manera que la suma de dígitos que están en cada fila, en cada columna y en cada diagonal tendrá que ser el valor de 15. Por ejemplo, uno de esos arreglos es el siguiente:

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Nombremos a cada casillas de la tabla por la indexación a través de la parejas ordenadas (i, j) como se muestra en seguida:

$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$
$(2,1)$	$(2,2)$	$(2,3)$
$(3,1)$	$(3,2)$	$(3,3)$

Bajo estas consideraciones, dé contestación a las siguientes preguntas:

(a) ¿Cuáles son los dígitos posibles a ocupar la casilla $(2,2)$?

(b) ¿Cuáles son los dígitos posibles a ocupar una de las casilla $(1,1)$, $(1,3)$, $(3,1)$ ó $(3,3)$?

(c) ¿Cuáles son los dígitos posibles a ocupar una de las casilla $(1,2)$, $(2,1)$ $(2,3)$ ó $(3,2)$?

(d) ¿Por qué las preguntas anteriores han sido planteadas de esa manera?

Problema 23. La gráfica de la parábola $y = x^2 + 1$ y la de la recta $y = 5x + 3$ se intersectan en dos puntos del plano. ¿Cuáles son estos puntos del plano?

Problema 24. Juan tiene una caja pequeña la cual contiene cinco canicas de diferentes colores (roja, verde, blanca, azul y negra) y de tamaño normal. Juan le pide a Pedro que saque una canica de la caja "sin ver". ¿Cuál es la probabilidad de que salga la canica rojo? Si Pedro saca la canica roja y se queda con ella, ¿cuál es la probabilidad ahora de que saque la canica negra?

Problema 25. Juan y Pedro son dos adolescentes de 12 y 13 años respectivamente, que se dedican a la venta de periódicos por las mañanas en una de las esquinas de una ciudad de la República Mexicana. Juan vende un periódica con información deportiva, mientras que Pedro lo vende con información financiera. En un día de ventas, Juan vende la cantidad de x periódicos, y Pedro vende la cantidad de y periódicos. Si las cantidades de x e y satisfacen que el doble de x es el triple de y aumentado en 29, y el doble de y es la cantidad de 141 disminuido con el triple de x. Hallar la cantidad de periódicos que vendieron Juan y Pedro en ese día.

Problemario Nivel Medio Superior

Problema 1. Considere las siguientes dos ternas pitagóricas distintas (a, b, c) y (x, y, z) las cuales al combinarlas determinan otra terna pitagórica. ¿Cuál de las siguientes triadas forman una terna pitagórica?

a) $(ax - by, ay + bx, cz)$

b) $(ax + by, ay + bx, cz)$

c) $(ax - by, ay - bx, cz)$

Problema 2. Sea el $\triangle ABC$ con $AB > AC$. Las bisectrices de los ángulos internos y externos en A intersectan a $\overleftrightarrow{BC}$ en los puntos$D$ y E respectivamente. Demuestre que:

$$\frac{\sqrt{AD^2 + AE^2}}{CD} - \frac{\sqrt{AD^2 + AE^2}}{BD} = 2.$$

Problema 3. Pruebe que $2^{1092} - 1$ es divisible por 1093^2.

Problema 4. ¿Cuál es el $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{x^a - a^x}{\arctan x - \arctan a}, a > 0$?

Problema 5. Calcule $I = \int \dfrac{dx}{x^5 + 1}$. $I = \dfrac{1}{5}\ln(x+1) - \dfrac{1}{20}\ln(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1) + \dfrac{\sqrt{5}}{20}\ln\dfrac{x^2 - \dfrac{1 - sqrt5}{2}x + 1}{x^2 - \dfrac{1 + sqrt5}{2}x + 1} + \dfrac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{10}\arctan\dfrac{4x - (1 + \sqrt{5})}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} + \dfrac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{10}\arctan\dfrac{4x - (1 - \sqrt{5})}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} + c$

Problema 6. Sean $0 < a < b < c < d$ enteros impares tales que

1. $ad = bc$

2. $a + d = 2^k, b + c = 2^m$, para algunos enteros k, m.

Pruebe que $a = 1$.

Problema 7. Consideremos que cuatro ciudades están situadas en los vértices de un cuadrado de 100 km de lado. Los responsable de la construcción de la red carreteras que debe unir a las ciudades, desea que está red sea la más corta posible.

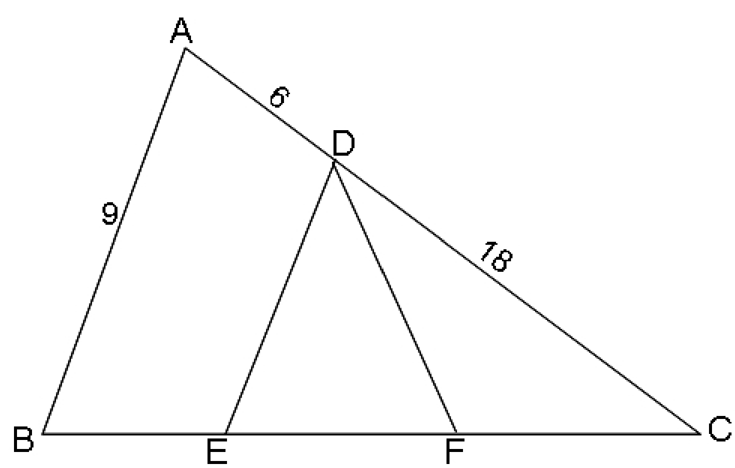
Uno comenta que podemos unir utilizando las carreteras que describen tres lados consecutivos del contorno de cuadrado eso nos dará 300 kilómetros, otro comenta mejores utilicemos las dos diagonales esto nos dará una longitud de $100\sqrt{2}$ km que son aproximadamente 282 km

¿Cuál es la red de carreteras más corta? La respuesta no es las diagonales del cuadrado.

Problema 8. Cuántas ternas de números $a, b, c \in \mathbb{Z}$ existen tales que $0 < a < b < c$, que ninguno de ellos sea divisible por 3 y que $a^2 + b^2 = c^2$.

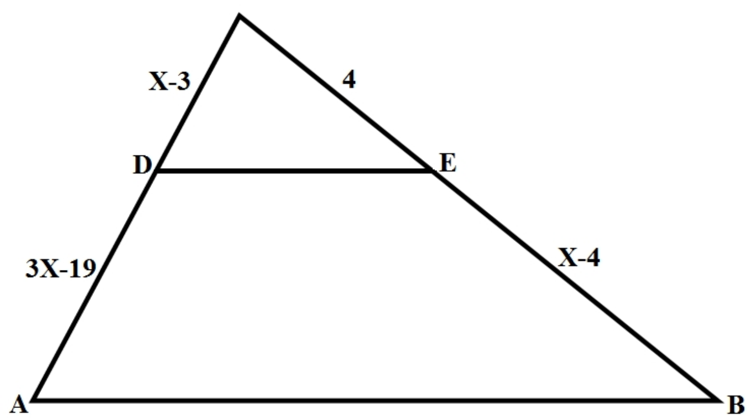
Problema 9. El perímetro de un rectángulo es 24 y la medida de una de sus diagonales es 8, encuentre el área del rectángulo.

Problema 10. En la siguiente figura se sabe: $\overline{AB}$ y $\overline{DE}$ son paralelos y que $\angle DEF$ y $\angle DFC$ son suplementarios. Con los datos anteriores y los de la figura calcule $x = |\overline{DF}|$.



Problema 11. Muestre que si desde un punto P situado en el exterior de un círculo dado se trazan dos rectas tangentes a éste, entonces los segmentos determinados entre P y cada uno de los puntos de tangencia son iguales.

Problema 12. Determine los valores de X para los cuales se cumple que $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$ en la siguiente figura.



Problema 13. Encuentre el valor de a en la expresión $3^{a+1} = 27^2$.

Problema 14. Demuestre que $5^{2n} - 1$ es divisible entre 8 para toda $n \in \mathbb{N}$.

Problema 15. Demuestre que $4^{2n+1} + 3^{n+2}$ es divisible por 13, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Problema 16. Encuentre el conjunto de las x en los reales que cumplan la siguiente condición

$$\left| \frac{-2x-3}{6-3x} \right| < 4.$$

Problema 17. ¿Cuántos collares diferentes se pueden hacer con cinco cuentas, dos de color rojo, tres de color verde y una color azul?

Problema 18. Encuentre el valor de $\sum_{i=1}^{n} (i \cdot i!)$.

Problema 19. Muestre que dados cualesquiera cinco números enteros, no necesariamente distintos, siempre se pueden elegir tres cuya suma es divisible por 3.

Problema 20. Pruebe que si p y $p+2$ son primos mayores que 3, entonces $p+1$ es un número par divisible por 3.

Problema 21. Si n es un número natural tal que n^2 tiene a 9 como el dígito que está en la posición de las decenas, entonces calcule el dígito de las unidades de n^2.

Problema 22. Calcule la altura de un tetraedro del que se sabe que la superficie de una de sus caras es 1

Problema 23. Una circunferencia pasa por los puntos $(1,3)$ y $(5,1)$. Además uno de los diámetros es paralelo al eje de las abscisas. Encuentre el área de esta circunferencia.

Problema 24. Considere un triángulo ΔABC, donde el vértice A tiene por coordenadas al punto $(2,2)$. Además suponga que las coordenadas de los puntos medios que unen los segmentos $\overline{CA}$ y $\overline{BA}$ están dados por $(\frac{3}{2},1)$ y $(3,1)$ respectivamente. Encuentre las coordenadas de los vertices B y C.

Problema 25. En cierta cafetería se ofrecen en el menú pasteles con un número impar de sabores. Si el chef de la cafetería tiene a su disposición 300 sabores, cuantas posibilidades tendrá a elegir un comensal hambriento de un pastel?

Problemario Nivel Superior

Problema 1. Sean O, A, B, C algunos puntos del espacio que no están en un plano. Denotemos por θ al valor del ángulo diedro entre los planos OAB y OAC. Exprese $\cos(\theta)$ a través de algunas funciones trigonométricas de los ángulos $\alpha = \angle BOC$, $\beta = \angle AOC$, $\gamma = \angle AOB$.

Problema 2. Sea ε una n-ésima raíz de la unidad, es decir, un número real o complejo tal que $\varepsilon^n = 1$. Calcule la siguiente suma:

$$\varepsilon + 2\varepsilon^2 + \ldots + (n-1)\varepsilon^{n-1}.$$

Problema 3. Calcule la suma:

$$\cos\frac{2\pi}{n} + 2\cos\frac{4\pi}{n} + \ldots + (n-1)\cos\frac{2(n-1)\pi}{n}.$$

Problema 4. Calcule la suma:

$$\operatorname{sen}(x) + 2\operatorname{sen}(2x) + 3\operatorname{sen}(3x) + \ldots + n\operatorname{sen}(nx).$$

Problema 5. Encuentre una fórmula para el término general x_n de la sucesión $x_0, x_1, x_2, \ldots$ definida mediante la siguiente fórmula recursiva y dos valores iniciales:

$$\begin{aligned} &x_n = 5x_{n-1} - 6x_{n-2} \qquad (n \geq 2), \\ &x_0 = 6, \\ &x_1 = 19. \end{aligned}$$

Problema 6. Deduzca una fórmula para el siguiente determinante de orden n:

$$D_n = \begin{vmatrix} 7 & 5 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 5 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 5 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & \ddots & 0 & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 2 & 7 \end{vmatrix}.$$

Problema 7. Sea $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ el conjunto de las matrices reales cuadradas $n \times n$. Denotemos por C al conjunto de todos los conmutadores del álgebra $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$C = \Big\{AB - BA\colon\ A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\Big\},$$

y consideremos al subespacio S del espacio vectorial $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ generado por el conjunto C. Calcule la dimensión de S.

Problema 8. Sea $a \in \mathbb{R}^n$ un vector unitario, esto es, $a^{\mathrm{t}}a = 1$. Sea $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ la reflexión del espacio $\mathbb{R}^n$ respecto al hiperplano $\{v \in \mathbb{R}^n\colon\ a^{\mathrm{t}}v = 0\}$. Halle la matriz A asociada a la transformación lineal T respecto a la base canónica del espacio $\mathbb{R}^n$. Muestre que $A^{\mathrm{t}} = A$ y $A^2 = I$. Aquí I es la matriz identidad de orden n y A^{t} es la matriz A transpuesta.

Problema 9. Calcule el límite de la sucesión a_n definida mediante la siguiente fórmula:

$$a_n = \frac{\cos\frac{1}{n} + \cos\frac{2}{n} + \ldots + \cos\frac{n}{n}}{n}.$$

Problema 10. Sean $a_1, \ldots, a_m > 0$. Calcule el límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_{n+1}}{s_n},$$

donde

$$s_n = \sum_{k=1}^{m} a_k^n.$$

Problema 11. Sean $a_1, \ldots, a_m > 0$. Calcule el límite

$$\lim_{n\to\infty} \Big(a_1^n + \cdots + a_m^n\Big)^{1/n}.$$

Problema 12. Denotemos por I_n a la integral

$$\int_{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n} e^{-(x_1^2+\ldots+x_n^2)}\, dx_1 \cdots dx_n.$$

1. Establezca una relación entre I_n e I_1.
2. Calcule I_2 pasando a las coordenadas polares.
3. Calcule el volumen de la bola unitaria en $\mathbb{R}^n$.

Problema 13. Sea $f\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ una función continua de soporte compacto (es decir, existe un $b > 0$ tal que $f(x) = 0$ para todo $x > b$). Definimos la función $g\colon (0,+\infty) \to [0,+\infty)$ de la siguiente manera:

$$\forall x > 0 \qquad g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(x)\,dx.$$

Demuestre la desigualdad de Hardy: para todo $p > 1$,

$$\int_0^{+\infty} g(x)^p\,dx \leq \frac{p}{p-1}\int_0^{+\infty} f(x)^p\,dx.$$

Problema 14. Sea D un conjunto abierto en $\mathbb{C}$, sea $f\colon D \to \mathbb{C}$ una función holomorfa. Se define la función $g\colon D \to \mathbb{C}$ mediante la regla: $g(z) = \overline{f'(z)}$ para todo $z \in D$. Calcule $g'(z)$ para todo $z \in D$.

Problema 15. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de clase C^2 y sea $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función holomorfa. Se define la función $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mediante la regla:

$$h(x,y) = f\Big(\Re(g(x+\mathrm{i}y)), \Im(g(x+\mathrm{i}y))\Big)$$

Calcule $\Delta(f \circ g)$, donde $f \circ g$ es la función compuesta y Δ es el operador diferencial de Laplace:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{(\partial x)^2} + \frac{\partial^2}{(\partial y)^2}.$$

Problema 16. Sea $n \in \mathbb{N}$. Consideremos la ecuación $x^n = 1$. Las raíces de esta ecuación son $\omega_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n}$, las cuales son llamadas raíces n-ésimas de la unidad. Una raíz n-ésima de la unidad ω se le llama raíz primitiva de la unidad si $1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}$ son todas las raíces n-ésimas de la unidad. Demuestre que ω_k es una raíz primitiva de la unidad si y sólo si $(k,n) = 1$.

Problema 17. Sea $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Demuestre que T es una transformación lineal si y sólo si existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $T(x) = \lambda x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Problema 18. Si $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una transformación lineal tal que $T(1,2) = (2,3)$ y $T(0,1) = (1,4)$. Determinar $T(x,y)$ para $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Y encontrar $T(-2,3)$.

Problema 19. Sea $T : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_2[x]$ la transformación lineal dada por

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a+d)x^2 + (c-b)x + (a+2b+c+2d).$$

Encuentre

1. una base y la dimensión del Kernel de T,
2. una base y la dimensión de la Imagen de T,
3. la matriz asociada a T respecto a las bases canónicas de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ y $\mathbb{R}_3[x]$.

Problema 20. Sea V un espacio vectorial real de dimensión impar y sea T un operador lineal en V. Demuestre que $\operatorname{Im} T \neq \ker T$.

Problema 21. Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una transformación lineal no cero. Demuestre que T es suprayectiva y obtenga la dimensión del Ker T.

Problema 22. Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una transformación lineal. Pruebe que existe $M > 0$ tal que

$$\|T(x)\| \leq M\|x\|, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^n.$$

Problema 23. Sea $(V, <,>)$ un espacio euclidiano. Demuestre:

1. $\|\alpha\| = \|\beta\|$ si y sólo si $< \alpha + \beta, \alpha - \beta >= 0$.

2. $\|\alpha+\beta\|^2 = \|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2$ si y sólo si $< \alpha, \beta >= 0$.

Pruebe que las afirmaciones anteriores no son ciertas para el espacio unitario $\mathbb{C}^2$.

Problema 24. Sea A una matriz real de orden n. Demuestre que

1. A y A^T tienen el mismo polinomio característico.
2. A y A^T tienen el mismo polinomio mínimo.
3. Si A es diagonalizable, entonces A^T también lo es.

Problema 25. Sea A un conjunto no vacío. Sean R y S dos relaciones en A. Se define la composición de R y S denotada por $R \circ S$ como:

$$a\, R \circ S\, b \text{ si y sólo si existe } c \in A \text{ tal que } aRc \text{ y } cSb$$

1. Demuestre que la composición de relaciones es asosciativa.
2. Si R y S son relaciones de equivalencia, ¿la composición será una relación de equivalencia?