Problemario Nivel Secundaria

Problema 1. Realizar las operaciones indicadas:

$$(a)\ \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1-\dfrac{3}{4}}{5\frac{3}{4}}\right)$$

$$(b)\ 1+100\tfrac{81}{98}+\left(100\tfrac{81}{98}\right)^2+\left(100\tfrac{81}{98}\right)^3.$$

Problema 2. Calcule el máximo común divisor de las siguientes parejas de números (a) $-204,\ 56$ (b) $2011,\ -2011$ (c) $605,\ 5515$

Problema 3. Convierta los siguientes números a base 10, 6 y 12 respectivamente (a) 502617_8 (b) 59375 (c) 1110010110_2

Problema 4. Convierta los siguientes datos en kilómetros-metros-centímetros, horas-minutos-segundos y grados-minutos-segundos, respectivamente. (a) $235781.4593037\ km$ (b) $57543.673451\,\text{mín}.$ (c) $5432789.37456\ seg.$

Problema 5. Una fábrica produjo un lote de cajas con 1000 bolígrafos cada una, el cual fue distribuido como sigue. El 47 % se distribuyó al centro del país, 23.4 % para el noreste, 16.37 % para el noroeste, 7.53 % para el sur y 5.7 % para el sureste. Si llegaron al sureste 855 cajas, ¿de cuántas cajas consistió el lote producido de bolígrafos? ¿Cuántas cajas llegaron a cada región?

Problema 6. Un empleado del gobierno federal recibió su aguinaldo correspondiente al año de 2010 por la cantidad de \$ 6500.00. El 13 % del mismo lo utilizó para la cena de fin de año, un 15 % para zapatos y un 20 % para vestido. El resto lo llevó a un banco para invertirlo a plazo fijo de 90 días con la tasa bruta del 1.9 %. Si el gobierno federal recibe el 0.6 % del interés bruto, ¿cuánto recibirá el empleado de interés neto y cuál será la cantidad del impuesto sobre la renta retenido?

Problema 7. Un automóvil va a una velocidad constante de 76 kilómetros por hora. ¿Cuál es su velocidad en metros por segundo?

Problema 8. Simplifique las siguientes fracciones: (a) $\dfrac{128a^{3/4}b}{62a^{4/3}b^{1/2}}$ (b) $\dfrac{27x^{-5/7}y^{1/2}}{405xy^{-1/3}}$.

Problema 9. Simplifique la siguiente expresión algebraica

$$\frac{\left(a^{3/2}-b^{5/2}\right)\left(a^{3/2}+b^{5/2}\right)}{\left(a-b^{5/3}\right)\left(a^2+ab^{5/3}+b^{10/3}\right)}$$

Problema 10. Encuentre los puntos que se encuentren en el tercer cuadrante del plano cartesiano tales su distancia a los puntos $(1,1)$ y $(-1,2)$ sea 5 y 4 unidades, respectivamente.

Problema 11. Encuentre las soluciones reales de las ecuaciones cuadrática siguientes: (a) $2x^2+x=3$ (b) $3x^2-4=0$ (c) $2x^2+x+3=0$.

Problema 12. Sea $f(x)=x^2+bx+c$ un polinomio con coeficientes reales el cual tiene por raíces a los números real n y m, no necesariamente distintos. Pruebe que o bien, $m=-b$ ó $m=c/n$.

Problema 13. Considere el polinomio $f(x)=x^2-3x-1$ Encuentre los valores reales a tales que $f(2-a)=3$.

Problema 14. Encuentre un polinomio $f(x)=x^2-bx-c$ cuya gráfica cruce el eje de las x's en los 0 y $1/2$.

Problema 15. Realice la siguiente operación algebraica

$$\frac{x-1}{x}+\frac{3}{x^2}-\frac{2x-3}{x+1}$$

Problema 16. Encuentre los valores de A y B para que la suma algebraica

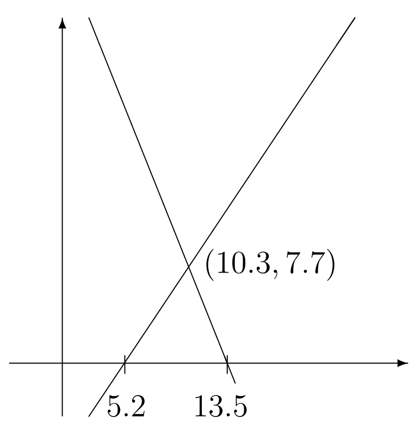
$$\frac{1}{x}-\frac{A}{x^2}+\frac{B}{x+1}$$

de como resultado la fracción

$$\frac{2x^2-1}{x^2(x+1)}\ .$$

Problema 17. Un triángulo rectángulo tiene uno de sus ángulos la medida de 30° y uno de sus lados la medida de 8 unidades. ¿Cuáles deben de ser las medidas de los otros dos lados?

Problema 18. Determine el sistema de ecuaciones lineales que caractericen la siguiente gráfica:



Problema 19. Considere un triángulo rectángulo cuyos lados tienen longitudes $l_1,\ l_2$ y l_3, y tales que l_1 es las tres cuartas partes de la de l_2 y l_3 es la mitad de la diferencia de l_2 y l_1. Probar que la suma de los cosenos de los ángulos interiores del triángulo es $-3/8$.

Problema 20. El perí metro de un polígono es de 21 unidades. ¿Cuál debe de ser el radio de una circunferencia para que tenga

Problema 21. Se tiene una esfera cuyo volumen es de π^3 unidades cúbicas. Calcule las dimensiones de cualquier cubo circunscrito a la esfera.

Problema 22. ¿Existe un número real positivo r con el que se pueda construir un círculo de radio r y un triángulo equilátero de lado r teniendo ambos la misma superficie?

Problema 23. Se tiene una caja la cual contiene 2 bolas blancas y 1 rojas. Si se extrae una bola de la caja, ¿cuál es el porcentaje de que salga blanca?

Problema 24. Un equipo de trabajo de 6 alumnos de un salón de clases de una secundaria tiene que realizar la tarea de resolver cinco problemas de matemáticas, cinco problemas de química y cinco problemas de física. Si el trabajo se distribuye de manera equitativa y al asar, ¿de cuántas maneras podrían elegirse un subequipo para realizar los cinco problemas de matemáticas?

Problema 25. Cuatro alumnos de una secundaria formaron un equipo para participar en un concurso de matemáticas realizado en uno de los estados de la República Mexicana. Después de su participación, el equipo obtuvo el segundo lugar estatal, recibiendo de premio una medalla y un diploma de participación. Para recibir dicho reconocimiento, los cuatro alumnos tenían que pasar alineados al estrado, donde el gobernador estatal los felicitaría. ¿De cuántas maneras podían alinearse los cuatro alumnos?

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL 2011

Problemario Nivel Medio Superior

Problema 1. Una sucesión de números reales está definida de la siguiente forma $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ y $x_{n+1} = x_n - 2x_{n-1}$ para todo $n > 3$. Diga si la siguiente igualdad es cierta $x_{27} = x_{18} - x_{19} - x_7$.

Problema 2. Una pareja de círculos (C_1, C_2) se llaman cincuentenarios si sus centros están en $(1961, 2011)$ y en $(-2011, -1961)$ respectivamente, sus radios son enteros y además no se intersectan. ¿Cuántas parejas de círculos cincuentenarios existen?

Problema 3. Si se forman un cubo C_3 de volumen $27u^3$ con cúbitos de volumen $1u^3$, entonces hay sólo un cúbito completamente escondido, o sea que ninguna cara es parte de alguna de las caras de C_3. Si se forma un cubo C_{2011} de volumen 2011^3 ¿cuántos cúbitos están completamente escondidos?

Problema 4. Muestre que $n\sqrt{2}$ no es entero para cualquier entero positivo n.

Problema 5. En un círculo de radio 1 se dibujan ocho puntos, muestre que existen dos con distancia menor que 1.

Problema 6. En una fiesta hay n personas, si cada persona ha saludado de mano a al menos otra persona. Demuestre que hay al menos dos personas que han saludado al mismo número de personas.

Problema 7. Encuentre dos números irracionales a y b tales que a^b es racional.

Problema 8. Encuentre los enteros entre 1 y 2011 que son divisibles por 30 pero no por 16.

Problema 9. Encuentre el coeficiente de x^3 en la siguiente expresión $(x-2)^3(2+x^2)^{11}$.

Problema 10. Encuentre la cantidad de puntos en los que se intersectan las gráficas de las siguientes funciones $y = x^{12}$ y $y = 2^x$.

Problema 11. Encuentre todos los a en los reales tal que hacen que el siguiente sistema de ecuaciones no tenga solución

$$ax + 4x = 3 \ (a+1)x + 8x = \sqrt{3}.$$

Problema 12. Describa explícitamente el siguiente conjunto
$\{x \in \mathbb{R} \mid |x-2| < |3-x|\}$.

Problema 13. Sean a y b números reales positivos. Encuentre un número real positivo en términos de a y b que sea menor a ellos.

Problema 14. Encuentre el valor exacto de $sen\left(\frac{11\pi}{12}\right)$.

Problema 15. Simplifique la siguiente expresión racionalizando

$$\frac{\sqrt{2y+10} - 2\sqrt{y+1}}{y^2 - 2y - 3}.$$

Problema 16. Grafique la siguiente función

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 + 6x + 9}.$$

Problema 17. ¿Cuál es la mayor cantidad de regiones en que se puede dividir un plano usando un círculo, un triángulo y un cuadrado?

Problema 18. Encuentre la ecuación de la recta que une los puntos de intersección entre la elipse $x^2 + \frac{y^2}{2} = 1$ y la parabola $y = 2x^2$.

Problema 19. Encuentre el área del circulo que pasa por los puntos $(0, 1), (-1, -1), (1, -1)$.

Problema 20. Un repartidor de refrescos visita a una tienda cada 9 días y el de dulces cada 15 días, si ambos repartidores coincidieron el día de hoy en la tienda, cuándo volveran a coincidir?

Problema 21. Tres hilos de 567, 378 y 84 cm respectivamente, quieren ser cortados en trozos de un mismo tamaño, siendo la longitud de cada uno de los pedazos un número entero de centímetros. Cuál es el número mínimo de trozos que pueden obtenerse?

Problema 22. Cuál es la menor cantidad de dulces de 6 pesos que pueden comprarse usando únicamente billetes de 20 pesos?

Problema 23. Se tienen que acomodar 30 niños y 24 niñas en distintas habitaciones, de forma que cada habitación tenga siempre el mismo número de niños o niñas (nunca mezclando niños con niñas en una misma habitación) y de forma tal que ese número sea el mas grande posible. Cuántos integrantes habrá en cada habitación?

Problema 24. Marcos tiene 84 hojas blancas y 72 hojas verdes, si quiere formar paquetes con igual contenido de hojas y formar la menor cantidad de paquetes, cuántas hojas verdes habrá en cada paquete?

Problema 25. Sea n_1 la suma de todas las cifras del número 55^{55}, sea n_2 la suma de las cifras del número n_1 y sea n_3 la suma de todas las cifras de n_2. Encuentre el valor de n_3.

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL 2011

Problemario Nivel Superior

Problema 1. Sean $P_0, \ldots, P_{n-1}$ los vértices de un polígono regular inscrito en una circunferencia de radio 1. Denotemos por $|\overrightarrow{P_0P_k}|$ la longitud del vector $\overrightarrow{P_0P_k}$, esto es, la longitud del segmento P_0P_k. Demuestre que

$$\prod_{k=1}^{n-1} |\overrightarrow{P_0P_k}| = n.$$

Problema 2. Sea $t \in \mathbb{R}$. Calcule $\exp(A)$, donde

$$A = \begin{pmatrix} t & 1 \\ -t^2 & -t \end{pmatrix}$$

Problema 3. Sean $t, u \in \mathbb{R}$. Calcule $\exp(A)$, donde

$$A = \begin{pmatrix} t & t-u \\ t+u & -t \end{pmatrix}.$$

Problema 4. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Calcule el límite

$$\lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\alpha}{n} \\ \frac{\alpha}{n} & 1 \end{pmatrix}^n.$$

Problema 5. La función $A\colon \mathbb{R} \to \mathfrak{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ está definida mediante la regla

$$A(t) = \exp(t \cdot B),$$

donde $B \in \mathfrak{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ es una matriz fija. Demuestre que $B = A'(0)$ y determine qué condición sobre B es necesaria y suficiente para que la matriz $A(t)$ sea ortogonal para todo $t \in \mathbb{R}$.

Problema 6. Sea $f\colon [3,5] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que

$$\min_{x\in[3,5]} f(x) = 37, \qquad \max_{x\in[3,5]} f(x) = 57.$$

Demuestre que existe por lo menos un punto $c \in [3,5]$ tal que $f(c) = 10c + 7$.

Problema 7. Demuestre que $x^y + y^x > 1$ para toda $x, y > 0$. Indicación: puede usar el hecho que $e^{1/e} \approx 1{,}4$.

Problema 8. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función arbitraria. Demuestre que la función $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ definida mediante la regla

$$g(y) = \sup_{x\in\mathbb{R}} \Big(xy - f(x)\Big),$$

y llamada la *transformada de Legendre* de la función f, es una función convexa, es decir,

$$\forall y_1, y_2 \in \mathbb{R} \qquad \forall \lambda \in [0,1] \qquad g(\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2) \le \lambda g(y_1) + (1-\lambda)g(y_2).$$

Problema 9. Sean $a_0, a_1, a_2, \ldots$ números tales que

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-2)^n$$

para todo $x \in (0,1)$. Calcule

$$\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}.$$

Problema 10. Calcule los coeficientes a_n del desarrollo de Maclaurin de la función f:

$$f(z) = \frac{1}{1 - x + x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

calcule el radio de la convergencia de la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ y determine si la serie converge o no en los puntos extremos del intervalo de la convergencia.

Problema 11. La suceción de funciones $f_n\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}$, donde $n \in \{1,2,3,\ldots\}$, está definida mediante la regla:

$$f_n(x) = n\left(\sqrt{x+\frac{1}{n}} - \sqrt{x}\right) \qquad \forall x \in (0,+\infty) \quad \forall n \in \{1,2,3,\ldots\}.$$

Calcule el límite puntual de esta sucesión y determine si la convergencia es uniforme o no.

Problema 12. Sea $a > 0$. Calcule el límite

$$\lim_{x\to a} \frac{x^{x^x} - a^{a^a}}{x-a}.$$

Problema 13. Sea $a > 0$. La sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ está definida de manera recurrente con una condición inicial:

$$x_0 = 1, \qquad\qquad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \quad \forall n \in \{0,1,2,\ldots\}.$$

Demuestre que esta sucesión es convergente y calcule su límite.

Problema 14. Calcule la suma de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

Problema 15. Un par ordenado $(\mathbb{F}, P)$ se llama *campo ordenado* si $\mathbb{F}$ es un campo, P es un subconjunto de $\mathbb{F}$ y se cumplen las siguientes condiciones:

- para toda $a, b \in \mathbb{F}$, $a + b \in \mathbb{F}$;
- para toda $a, b \in \mathbb{F}$, $ab \in \mathbb{F}$;
- para todo $a \in \mathbb{F}$ se tiene uno y sólo uno de los siguientes tres casos:

$$a \in P \qquad \text{ó} \qquad a = 0 \qquad \text{ó} \qquad -a \in P.$$

Demuestre que en el campo de números complejos $\mathbb{C}$ no existe ningún subconjunto P tal que $(\mathbb{C}, P)$ fuera un campo ordenado.

Problema 16. Sean $S_1, S_2, \ldots, S_k$ subespacios del espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ distintos de $\mathbb{F}^n$. Demuestre que su unión $S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_k$ también es distinta de $\mathbb{R}^n$.

Problema 17. Sea $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz invertible. Se dice que un par de matrices (L, U) es una "factorización LU" de la matriz A si $A = LU$, L es una matriz triangular inferior con elementos diagonales iguales a 1, U es una matriz triangular superior con elementos diagonales no nulos. Demuestre que si existe una factorización LU de la matriz A entonces esta factorización es única.

Problema 18. Denotemos por S_n al grupo simétrico de orden n, es decir, el conjunto de todas las permutaciones del conjunto $\{1, \ldots, n\}$ dotado con la operación de composición $\circ$. Si $\varphi \in S_n$, entonces denotemos por P_φ a la matriz de la permutación φ:

$$P_\varphi = \left(\delta_{\varphi(i),j}\right)_{i,j=1}^{n}.$$

Establezca y demuestre una fórmula general que exprese $P_{\varphi\circ\psi}$ a través de P_φ y P_ψ, donde $\varphi, \psi \in S_n$.

Problema 19. Sea n un número natural fijo. Para toda $p, q \in \{1, \ldots, n\}$ denotemos por $E_{p,q}$ a la matriz cuadrada de orden n cuya (p, q)-ésima entrada es 1 y todas las demás entradas son nulas:

$$E_{p,q} = \left(\delta_{p,i}\delta_{q,j}\right)_{i,j=1}^{n}.$$

Encuentre y demuestre una fórmula para el producto $E_{p,q}E_{s,t}$ donde $p, q, s, t \in \{1, \ldots, n\}$.

Problema 20. Sea A una matriz real simétrica de orden n con valores propios $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tales que

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n,$$

y sea $v \in \mathbb{R}^n$. Calcule el límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{v^t A^{n+1} v}{v^t A^n v}.$$

Problema 21. Sea $\lambda > 0$ Considere $z_1 = 1$ y $z_1 \cdots z_{n+1} = z_1 \cdots z_n + \lambda_i$ para toda n. Escriba z_n en términos de n y grafique en el plano complejo la sucesión.

Problema 22. Considere que un número entero positivo esta en el conjunto A si y sólo si esta en el intervalo [1,99] y la suma de sus dígitos es mayor que 9. Hallar la cardinalidad de A

Problema 23. Sea $n \in \mathbb{N}$ Hallar la cantidad de enteros en $[1, (9 \times 10^n) + (9 \times 10^{n-1}) + \cdots + (9 \times 10) + 9]$ tales que la suma de sus dígitos es mayor que $n * 9$

Problema 24. Hallar $\int_0^1 f(t)dt$ si

$$f(x) = \begin{cases} \frac{k}{k+1} \quad si \quad x \in (1 - \frac{1}{k-1}, 1 - \frac{1}{k}) \text{con } k \in \mathbb{N} - \{1\} \\ \\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad \text{en otro caso} \end{cases}$$

Problema 25. Si todo punto de un plano es coloreado de rojo o azul, demuestre que existe un rectángulo tal que sus vértices son del mismo color.

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL 2011