“Concurso Nacional de Matemáticas Pierre Fermat Edición 2010”

Guía–Problemario para Nivel Secundaria

Problema 1

Simplificar la expresión numérica siguiente:

$$7\frac{3}{5} - 8\frac{1}{4} + 3\frac{1}{3}\pi\,.$$

Problema 2

Encontrar el número real x cuya distancia a $1+\sqrt{2}$ sea $\dfrac{4+\sqrt{2}}{2}$. ¿Es el número real x, único?

Problema 3

Localizar los siguientes números en la recta numérica:

(i) 0.953174;

(ii) 1000030002.48294857.

Problema 4

Encontrar los siguientes conjuntos:

(i) El conjunto de los números reales x que satisfagan la relación $|x+1| = 3$.

(ii) El conjunto de los números reales x que satisfagan la relación $|x-3| = 2$.

Problema 5

Todo número entero se puede expresar de manera única en la forma $4n$, $4n+1$, $4n+2$ ó $4n+3$, para algún entero n. Por ejemplo, el número 2010 es de la forma $4n+2$. ¿De qué forma es el número que resulta de multiplicar diez números de la forma $4n+3$?

Problema 6

En el siguiente arreglo de números, completar el renglón marcado con asteriscos.

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} & & & & & & & 3 & & & & & & & & \\ & & & 13 & & & & & & & & 15 & & & & \\ & 53 & & & & 55 & & & & 61 & & & & 63 & & \\ * & & * & & * & & * & & * & & * & & * & & * & \end{array}$$

Problema 7

Convertir los siguientes números al sistema que se pida:

(i) $(11111010010)_2$ al sistema decimal.

(ii) 2010 al sistema binario.

(iii) $(2010)_3$ al sistema sexagesimal.

Problema 8

Encontrar los números reales x e y tales que

$$\frac{x^2 - y^2}{4} = 1 \qquad \text{y} \qquad \frac{x+y}{4} = 2\,.$$

Problema 9

Usando la igualdad algebraica

$$(x+y)^2 - (x-y)^2 = 4xy,$$

comprobar que el número 399960000 se puede expresar como una diferencia de cuadrados de números enteros. ¿Se puede aplicar este procedimiento para el número 2010?

Problema 10

Factorizar la expresión algebraica

$$12x^3 - 33x^2y + 21xy^2 - 6y^3.$$

Problema 11

Simplificar la expresión algebraica

$$\frac{x^3 + 4x^2y - xy + 4xy^2 - 2y^2}{x + 2y}\,.$$

Problema 12

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función con regla de correspondencia $f(x) = 5x^2 - x + 1$, para cada $x \in \mathbb{R}$. Calcular:

$$f\left(\frac{1-\sqrt{2}}{2}\right).$$ [1]

Problema 13

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función con regla de correspondencia $f(x) = -3x^2 - 2x + 1$, para cada $x \in \mathbb{R}$. Para $c > 2$, ¿existe un número real x tal $f(x) = c$?

Problema 14

Pedro desea enviar desde el Distrito Federal la cantidad de $\$2500.00$ a su tío Julian, quien vive en Taxco, Guerrero. Una tienda comercial dedicada al envío de dinero le cobra $\$186.50$ por dicho envío. Si tal tienda comercial le cobra el $3\,\%$ adicional por enviar $\$2500.00$ mas a la misma ciudad, ¿cuánto pagara Pedro por enviar $\$5000.00$?

Problema 15

Convertir las siguientes cantidades en lo que se pida:

(i) 15 hrs 35 min 47 seg, a días.

(ii) $183^0\ 27'\ 3''$, a grados.

Problema 16

Obtener la solución de las siguientes ecuaciones:

(i) $2^{2^{2x-3}} = 7.$

(ii) $\sqrt[3]{\ln(x)} = 4.$

Problema 17

Encontrar los siguientes conjuntos:

(i) El conjunto de todos los números reales x tales que $2x^2 + 1 = 0$.

(ii) El conjunto de los números reales x tales que $\ln(x) = x$.

Problema 18

Encontrar la solución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$y^{3x-2} = 2$$
$$y^x = 2.$$

[1] En este problema y en el siguiente, $\mathbb{R}$ simboliza al conjunto de números reales.

Problema 19

Considérese la ecuación

$$\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1\,. \qquad (*)$$

(i) ¿Sabe cuál es el lugar geométrico de los puntos (x, y) que satisfacen la ecuación $(*)$?

(ii) Si $y = 1$, ¿cuáles deben de ser los valores que debe de tomar x para que se satisfaga la ecuación $(*)$?

(iii) Si ahora $y = 3$, ¿existen números reales x que satisfacen la ecuación $(*)$?

Problema 20

En el plano cartesiano, graficar las parejas (x, y) tales que $x = 1/y$, con $y \neq 0$.

Problema 21

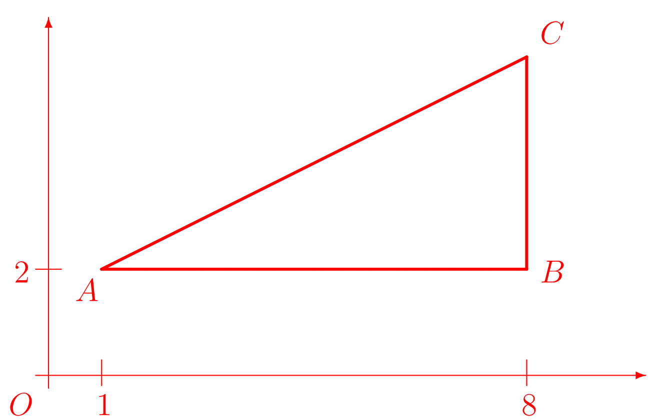
Graficar las parejas ordenadas (x, y) tales que $x = y^2 + 3y - 1$.

Problema 22

Calcular el apotema de un hexágono regular cuyo perímetro es $P = 19\,u$ (u unidades).[2]

Problema 23

Si el área del triángulo rectángulo $\triangle ABC$ de la figura mostrada es de $14\,u^2$ (u unidades), encontrar las coordenadas del punto C.



Problema 24

Considérese un círculo de centro O, radio r, perímetro P y área A. Demostrar que:

[2] Téngase presente que el apotema de un polígono regular es el radio de la circunferencia inscrita en él.

(i) El cociente $\dfrac{P^2}{A}$ es una constante, independientemente del círculo que se tenga.

(ii) Todo cuadrado de área A y lado ℓ, debe cumplir con que $\ell = \sqrt{\pi}\, r$.

Problema 25

Sea T un triángulo equilátero, si la longitud de cada uno de sus lados es $\ell = 2u$, entonces calcular el radio del círculo de área igual a la del triángulo T. Dar el resultado con un error de menos de 10^{-8}.

Contacto: R. Mancio Toledo

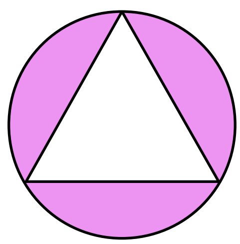
rmancio@esfm.ipn.mx, xolocuate@yahoo.com.mx

“Concurso Nacional de Matemáticas Pierre Fermat Edición 2010”

Guía–Problemario para Nivel Medio Superior

Problema 1

Calcular el área sombreada en el siguiente círculo de radio 2010.



Problema 2

El siguiente número está en base 2*:*

$$1111\ldots1$$

y tiene 2010 dígitos, ¿Qué número es en base 2010?

Problema 3

En un reloj de manecillas, calcular el número de veces que la manecilla de los minutos se encuentra exactamente encima de la manecilla de las horas.

Problema 4

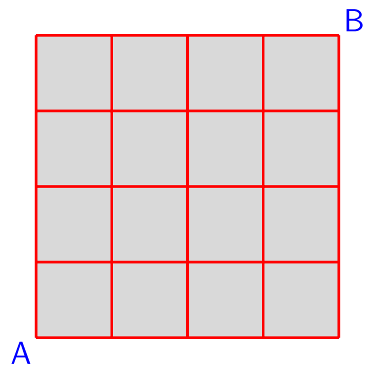
¿Cúal es el área de un cuadrado que tiene sus vértices entre las curvas $y=-\sqrt{x^2-1}$ *e* $y=-x^2+1$*?*

Problema 5

Encontrar las soluciones racionales de la ecuación $\operatorname{sen} x = \cos x$. *¿Cuáles de estas soluciones se encuentran en el intervalo* $[-2\pi, 2\pi]$*?*

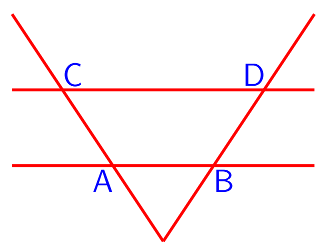
Problema 6

¿Cuántos caminos distintos hay para ir del punto A al punto B? Si se puede mover hacia la derecha, hacia la izquierda y hacia arriba, pero no se puede mover hacia abajo?



Problema 7

En la siguiente figura $\overline{AB} \parallel \overline{CB}$. *Demostrar que se puede dibujar un circunferencia que pase por* A, B, C *y* D



Problema 8

Encontrar las soluciones que no sean reales del polinomio $x^5 + 2x^4 - x - 2$.

Problema 9

La representación de las fracciones:

$$\frac{27}{7} = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6}}\,, \qquad \frac{146}{31} = 4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4}}}}$$

recibe el nombre de representación en ***"fracciones continuas"***.[1] *Encontrar la representación en "fracciones continuas" de las fracciones* $\dfrac{317}{38}$ *y* $\dfrac{527}{49}$.

[1] Algunos autores, prefieren utilizar el nombre de ***"fracción continuada"*** en vez de fracción continua.

Problema 10

Juan es ayudante de un repostero el cual le ha encargado comprar los ingredientes para preparar algunos pasteles de manzana y de naranja. Ya estando en el mercado se percata que la lista de ingredientes que le pidieron comprar no incluía la cantidad de huevo ni de manzana, la lista era:

Lista de Juan	
Ingrediente	**Cantidad**
Harina	12.5 Kg.
Huevo	
Leche	12 ℓ.
Manzana	
Naranja	6 Kg.
Levadura	5.5 Kg.

como llevaba el dinero exacto para la compra, Juan recuerda la cantidad de ingredientes que necesita cada pastel, con esta información, Juan deduce cual era la cantidad de huevo y manzana que debía comprar, realiza la compra y regresa a la pastelería. La receta para cada pastel es:

Cantidades por pastel		
Ingredientes	**Pastel de manzana**	**Pastel de naranja**
Harina	1.5 Kg.	2 Kg.
Huevo	0.5 Kg.	0.5 Kg.
Leche	2 ℓ.	1.5 ℓ.
Manzana	1 Kg.	0 Kg.
Naranja	0 Kg.	1.5 Kg.
Levadura	0.5 Kg.	1 Kg.

¿Cuáles fueron las cantidades de huevo y de manzana que Juan compró?

Problema 11

Demostrar que los coeficientes del desarrollo del binomio $(a+b)^{63}$ son todos numeros impares.

Problema 12

Considérese el polinomio $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$, en donde todos sus coeficientes $a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ son números enteros. Demostrar que si el polinomio posee al menos una raíz racional, entonces tal raíz debe ser un número entero.

Problema 13

Calcular el número de puntos con coordenadas enteras que se encuentran en el círculo de radio 8.3*, incluidos los que se encuentran sobre su circunferencia*

Problema 14

Encontrar todos los numeros de dos dígitos de forma tal que al dividir el número entre la suma de los dígitos se obtenga por resultado 4*.*

Problema 15

Demostrar que el número de puntos con coordenadas enteras que se encuentran en la región definida por las desigualdades $x > 0$*,* $y > 0$*,* $xy \leq 10$ *esta dada por:*

$$2 \sum_{0 < k \leq \sqrt{10}} \left[\frac{10}{k} \right] - \left[\sqrt{10} \right]^2 = 27,$$

en donde $[z]$ *denota la parte entera del numero* z*.*

Problema 16

Considérese a un pentágono cuyos vertices se encuentran en los puntos $P_1 = (-2, -3)$*,* $P_2 = (-3, 2)$*,* $P_3 = (3, 8)$*,* $P_4 = (5, 1)$*,* $P_5 = (6, -4)$*. Encontrar al menos un conjunto de constantes no negativas* $\{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5\}$ *tales que si* $x = \left(1, \frac{1}{2}\right)$ *entonces:*

$$x = c_1 P_1 + c_2 P_2 + c_3 P_3 + c_4 P_4 + c_5 P_5$$

y que además:

$$c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 = 1.$$

¿Existe solo una combinación de constantes $\{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5\}$ *con tales características?*

Problema 17

Encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(1, 2)$ *y que además es ortogonal a una recta que pasa por el punto* $(0, 9)$*, donde además los puntos* $(0, 9)$ *y* $(1, 2)$ *pertenecen a una circunferencia de radio* 5*. ¿Es única la recta que se busca?*

Problema 18

Encontrar todos los numeros de tres dígitos tales que al dividirlos por la suma de sus dígitos se obtenga por resultado 20*.*

Problema 19

Demostrar que el producto de cuatro números consecutivos, no puede ser el cuadrado de un entero.

Problema 20

Sean a, b, c numeros naturales. Supóngase que para todo número natural n, existe un triángulo cuyos lados tienen longitud a^n, b^n y c^n respectivamente. Demostrar que todos estos triángulos son isósceles.

Problema 21

Demostrar que si $m_1, m_2, \ldots, m_n$ son números naturales distintos y ninguno divisible por primos mayores a 3, entonces

$$\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \cdots + \frac{1}{m_n} < 3.$$

Problema 22

Demostrar que el polinomio $p(x) = x^4 + 2x^2 + 2x + 2$ no se puede escribir como el producto de polinomios de la forma $x^2 + ax + b$ y $x^2 + cx + d$, con a, b, c y d numeros enteros.

Problema 23

Encontrar todas las soluciones enteras no negativas del siguiente sistema de ecuaciones:

$$3x^2 - 2y^2 - 4z^2 + 54 = 0;$$
$$5x^2 - 3y^2 - 7z^2 + 74 = 0.$$

Problema 24

Encontrar todas las decenas de numeros enteros que tienen la propiedad de que al sumar nueve de ellos dan como resultado 82, 83, 84, 85, 87, 89, 90, 91 o 92.

Problema 25

Si $A = (0, -10)$ y $B = (2, 0)$ Encontrar el punto C sobre la parábola $y = x^2$ y que minimize el valor del área del triángulo $\triangle ABC$

Contacto: R. Mancio Toledo

rmancio@esfm.ipn.mx, xolocuate@yahoo.com.mx

“Concurso Nacional de Matemáticas Pierre Fermat Edición 2010”

Guía–Problemario para Nivel Superior

Problema 1

Sea $\mathbb{F}_p$ *el campo con* p *elementos. Calcular el número de matrices invertibles (no singulares) de tamaño* 3×3 *con entradas en el campo* $\mathbb{F}_p$.

Problema 2

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *la función con regla de correspondencia:*

$$f(x) = \frac{3x^2 + 2x + 1}{x^3 - x}.$$

Calcular la 100*–ésima derivada de la función* f *en el punto* $x_0 = 2$.

Problema 3

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *la función con regla de correspondencia:*

$$f(x) = \arctan 2^{x-10}.$$

Calcular la suma $f(0) + f(1) + \ldots + f(20)$.

Problema 4

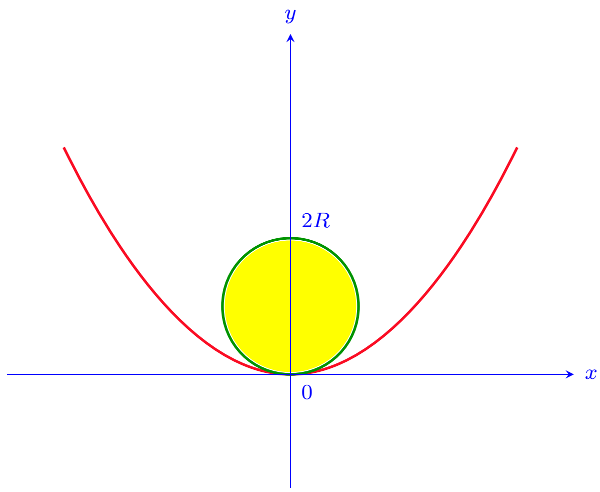
Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \right)^{(2010)},$$

en donde el exponente (2010) *denota a la* 2010*–ésima derivada.*

Problema 5

Considérese una trinchera cuya sección transversal tiene la forma de la parábola $y = x^2$*. Calcular el radio máximo del tubo que está colocado a lo largo de esta trinchera y descansa sobre su fondo. Véase la figura.*



Problema 6

Encontrar los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ *de manera que la integral indefinida:*

$$\int \frac{ax^3 + bx^2 + 5x + 3}{x^4 - 2x^2 + 1}\, dx$$

no sea una función trascendente.

Problema 7

Dibujar el siguiente subconjunto del plano cartesiano:

$$\mathsf{K} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon\ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2},\ 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2},\ \operatorname{sen}(x) \geq \cos(y) \right\}.$$

Problema 8

Dibujar el siguiente subconjunto del plano cartesiano:

$$\mathsf{L} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon\ -2\pi \leq x \leq 2\pi,\ -2\pi \leq y \leq 2\pi,\ \operatorname{sen}(x) \geq \cos(y) \right\}.$$

Problema 9

Calcular el límite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(1 + \dfrac{3}{n}\right)^{n^2}}{e^n}.$$

Problema 10

Sean n un número natural y $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ el conjunto de matrices de tamaño $n \times n$ con entradas en el campo de números reales $\mathbb{R}$. Sea A $= (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *la matriz definida de la siguiente forma:*

$$a_{ij} = \text{máx}\,\{i, j\} \quad \textit{para cada} \;\; i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Calcular el determinante de A*.*

Problema 11

Sea B $= (b_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$[1] *la matriz definida de la siguiente forma:*

$$b_{ij} = \begin{cases} 7 & \text{si} \;\; i = j \\ 5 & \text{en cualesquiera otro caso} \end{cases}, \qquad \textit{para cada} \;\; i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Calcular el determinante de B*.*

Problema 12

Sea (a_n) la sucesión de números reales definida inductivamente como sigue:

$$a_1 = 1, \qquad a_n = \sqrt{6 + a_{n-1}} \quad n = 2, 3, \ldots .$$

Demostrar que la sucesión es convergente y calcular su límite.

Problema 13

Sea P $= \{\,(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon \; x, y > 0\,\}$*. Sean $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m \in$* P*. Demostrar que:*

$$\|\,\vec{v}_1\,\| + \|\,\vec{v}_2\,\| + \cdots + \|\,\vec{v}_m\,\| \leq \sqrt{2}\;\|\,\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \cdots + \vec{v}_m\,\|\,.$$ [2]

Problema 14

Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{n \to \infty} \underbrace{\ln\left(1 + \ln(1 + \cdots + \ln(1 + x)\right)}_{n \text{ veces}},$$

siempre que $x > 1$.

Problema 15

Demostrar o refutar:

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = -2.$$

Justificar ampliamente su respuesta.

---

[1] El conjunto $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se ha definido en el Problema 10.

[2] Aquí $\|\;\;\|$ denota a la conocida *norma euclidiana*, definida como $\|\,\vec{w}\,\| = \sqrt{\vec{w} \cdot \vec{w}}$ para todo $\vec{w} \in \mathbb{R}^2$.

Problema 16

Sea $\mathsf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *un campo vectorial. Demostrar que las siguientes condiciones son equivalentes:*

$i)$ *La matriz jacobiana de* F *es una matriz simétrica.*

$ii)$ F *es un campo gradiente, es decir, existe un campo escalar* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *tal que* $\mathsf{F} = \operatorname{grad} f$ *salvo alguna constante.*[3]

$iii)$ $\operatorname{rot} \mathsf{F} = 0$.

Problema 17

Demostrar con todo detalle que cualesquiera que sea $a > 0$ *se tiene que*

$$\int_a^{2a} \frac{dx}{x} = \ln 2.$$

Dar la interpretación geométrica de este hecho basada en las propiedades de la hipérbola equilátera $xy = 1$.

Problema 18

Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \frac{2}{3}\operatorname{sen}(x) - \frac{1}{3}\tan(x)}{x^5}.$$

Problema 19

Demostrar que los conjuntos:

$$\mathcal{N} = \{\mathsf{A} \subseteq \mathbb{N} \,:\, \mathsf{A} \text{ es finito}\};$$
$$\mathcal{R} = \{(r_n)_n \,:\, (r_n)_n \text{ es sucesión finita de números racionales}\};$$

son equipotentes. Nótese que este problema tiene una reformulación en términos de números algebraicos. ¡Escríbala!

Problema 20

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *la función cuya regla de correspondencia es:*

$$f(x, y) = \begin{cases} xy & \text{si } |y| \leq |x| \\ -xy & \text{si } |y| > |x| \end{cases}.$$

Demostrar que f *es continua en* $(0, 0)$. *¿Tiene* f *plano tangente en* $(0, 0)$*?*

[3] A la función f, se le da el nombre de *función potencial* del campo F.

Problema 21

Sea W *un conjunto no vacío y sea* $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ *una familia no vacía de conjuntos no vacíos. Sea* $\{f_\alpha\}_{\alpha\in I}$ *una familia de funciones tal que:*

$i)$ $f_\alpha : A_\alpha \to W$ *para todo* $\alpha \in I$.

$ii)$ $f_\alpha = f_\beta$ *en* $A_\alpha \cap A_\beta$ *para todo* $(\alpha,\beta) \in I \times I$.

Demostrar que existe una y sólo una función $f : \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha \to W$ *tal que* $f|_{A_\alpha} = f_\alpha$ *para todo* $\alpha \in I$.

Problema 22

Sea $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *la función con regla de correspondencia:*

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

$i)$ *Demostrar que* φ *es continua y derivable en* 0.

$ii)$ *Demostrar que para cualesquiera* $n \in \mathbb{N}$, *la* n*–ésima derivada de* φ *en* 0 *siempre existe.*

$iii)$ *¿Es* φ *desarrollable en serie de Maclaurin?*

$iv)$ *Si* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es una función continua y derivable en* 0, *entonces ¿es la función* $g(x) = f(x) + e^{-1/x^2}$ *desarrollable en serie de Maclaurin?*

Problema 23

Demostrar o refutar:

Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, *entonces* A *y* B *tienen los mismos valores propios si y sólo si* A *y* B *conmutan.*

Problema 24

Sea n *un número natural y sean* $c_1, c_2, \ldots, c_n$ *números reales todos distintos. Defínase la matriz* $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *como sigue:*

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ c_1^2 & c_2^2 & \cdots & c_n^2 \\ c_1^3 & c_2^3 & \cdots & c_n^3 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_1^{n-1} & c_2^{n-1} & \cdots & c_n^{n-1} \end{bmatrix}.$$

Demostrar que C *es invertible y calcular* C^{-1}.

Problema 25

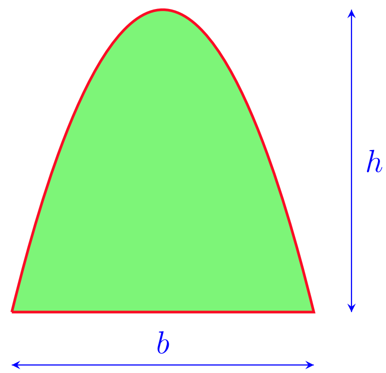
Sean $x, y \in \mathbb{Q}^+$ tales que $1 < y - x$. Demostrar que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x < m < y$.

Problema 26

$i)$ *Utilizar el principio de Cavalieri (forma integral) para demostrar que el área limitada por un arco parabólico de altura h y anchura b es:*

$$\mathrm{A} = \frac{2}{3}bh.$$

Véase la figura.



$ii)$ *Utilizar el principio de Cavalieri y el inciso (i), para encontrar el volúmen de un casquete parabólico de altura h y radio r.*

Contacto: R. Mancio Toledo

rmancio@esfm.ipn.mx, xolocuate@yahoo.com.mx