CONCURSO PIERRE FERMAT 2008
GUÍA PARA NIVEL SECUNDARIA

ESCUELA SUPERIOR DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS DEL I.P.N.

Problema 1. Sean A, B y C los conjuntos de todos los triángulos equiláteros, isóceles y rectágulos, respectivamente. Calcule los conjuntos $A \cap C$, $A \cup B$ y $B \cap C$.

Problema 2. De acuerdo con los conjuntos A y B del Problema 1, pruebe que la relación $B \subseteq A$ es falsa.

Problema 3. Sea $A = \{ m \in \mathbb{Z} \mid 2m = 4n+1, \text{ para algún } n \in \mathbb{Z} \}$, donde $\mathbb{Z}$ es el conjunto de los números enteros. Pruebe que $A \cap \mathbb{Z}$ es el conjunto vacío.

Problema 4. Sean U un conjunto universo y A un subconjunto de U tal que $A^{\mathsf{c}} \cap U$ es el conjunto vacío, donde A^{c} es el complemento de A en U. Pruebe que $A = U$.

Problema 5. En un censo de una colonia de un estado de la República Mexicana, las personas entre 15 y 18 años constituyen el $12.8\,\%$ de su población. De este porcentaje, el $63\,\%$ estudia y el $22\,\%$ trabaja y no estudia. ¿Cuántos jóvenes de entre 15 y 18 años trabaja y estudia, sabiendo que la población que no se encuentra entre los 15 y 18 años es de $63,247$ personas?

Problema 6. Juan tiene el doble de la edad de Pedro, y Carlos tiene la tercera parte de la edad de Juan. Si la suma de edades de Pedro, Juan y Carlos es de 77 años, ¿cuántos años tiene cada uno de ellos?

Problema 7. Construya una fracción mixta que se encuentre entre los números $-3\frac{1}{4}$ y $-3\frac{2}{5}$.

Problema 8. Sean x, y dos números reales tales que $x < y$. Pruebe que el número $z = \dfrac{x+y}{2}$ satisface las desigualdades $x < z$ y $z < y$. El punto z es llamado el **punto medio** de x y y.

Problema 9. Sean x y y números reales tales que $x < y$, y sea z el punto medio de x y y, como en el Problema 7. Pruebe que $z - x = \dfrac{y-x}{2}$ y que $y - z = \dfrac{y-x}{2}$.

Problema 10. Calcule el punto medio de los número -7.0135 y 2.701.

Problema 11. Calcule el producto $3\frac{2}{5} \cdot 4\frac{3}{8}$.

Problema 12. Exprese la fracción mixta $8\frac{7}{30}$ como un producto de dos fracciones mixtas, sabiendo que uno de dichos factores es $2\frac{3}{5}$.

Problema 13. Exprese el número

$$1000000000002008000000000001$$

como una diferencia de cuadrados de dos números enteros positivos.

Problema 14. Sea $n = (1a32)_4$ un número natural escrito en base 4, donde $a = 0,\ 1,\ 2$ ó 3. ¿Cuál debe de ser el valor del dígito a para que n sea divisible por 5?

Problema 15. Complete la siguiente pirámide de números

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 6 & & & & & \\
 & & & & 10 & & 14 & & & & \\
 & & & 12 & & 18 & & 24 & & & \\
 & & 12 & & 20 & & 28 & & 36 & & \\
 & 10 & & 20 & & 30 & & 40 & & 50 & \\
6 & & _ & & _ & & _ & & _ & & 66
\end{array}$$

Problema 16. Encuentre todas las parejas de enteros (m, n) que satisfagan alguna de las siguientes ecuaciones:

(i) $(m+3)(n+5)=11$.

(ii) $(m+n)^2 = 2(m+n)$.

(iii) $2^{m-1} = 2^n - 1$.

Problema 17. Un comerciante de una tlapalería vende clavos de 3 pulgadas, tanto sueltos como en bolsa, donde cada bolsa tiene la misma cantidad de clavos y cada clavo tiene el mismo peso. El comerciante observa que al poner en el plato A de una balanza 3 bolsas de clavos y 20 clavos sueltos, éstos pesan menos que si coloca en el plato B, de la misma balanza, 1 bolsa y 55 clavos. ¿Cuántos clavos a lo más tiene una bolsa de clavos?

Problema 18. Resuelva para la variable x, la desigualdad

$$5x + 13 < 7x - 1.$$

Problema 19. En una tarde nublada, dos equipos de barrio juegan un partido de fútbol haciendo la apuesta siguiente: sin tiempos de descanso, el equipo que meta 10 goles se gana la cantidad de $\$440.00$, resultado de poner $\$20.00$ cada jugador de cada equipo. Los equipos aceptan e inician el partido. Después de cierto tiempo, se produce una lluvia intensa por lo que tienen que dar por terminado el juego. Para ese momento, el equipo A lleva anotado 7 goles y el equipo B ha anotado 4 goles. Ante esta situación, los equipos deciden repartirse los $\$440.00$ de manera proporcional a los goles anotados. ¿Qué fracción de los $\$440.00$ le corresponde al equipo A, y cuál al equipo B?

Problema 20. Encuentre las soluciones que satisfagan a la ecuación:

$$\left(x^2+1\right)^2 - 9 = 0.$$

Problema 21. Sean $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales y f una función de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ con regla de correspondencia $f(x) = 3x - 1$ para cada $x \in \mathbb{R}$. Encuentre los valores $x \in \mathbb{R}$ tales que

$$(f(x))^2 = x f(x).$$

Problema 22. Sea f una función de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ dada por la regla de correspondencia $f(x) = ax^2 + bx + c$ para cada $x \in \mathbb{R}$, donde a, b y c son constantes reales. Pruebe que $f(-x) = f(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}$ si y sólo si $b = 0$.

Problema 23. Calcule el producto de la expresión algebraica siguiente

$$\left(\frac{x^{2/3}}{3} - 5x^{1/2} - \frac{3}{2}\right)\left(2x^{5/6} + \frac{4x^{3/2}}{5} + x + \frac{1}{5}\right).$$

Problema 24. De la fracción algebraica

$$\frac{2x^3 - 3x^2 - 5x + 6}{2x^3 + 3x^2 - 8x - 12},$$

obtenga otra equivalente y que sea reducida.

Problema 25. Simplifique la fracción algebraica

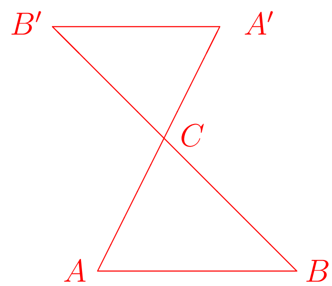
$$\frac{1 + \dfrac{x + \log(x^2) - x^2 - 2}{x + \log(x^2) - x^2 - 4}}{1 - \dfrac{x + \log(x^2) - x^2}{x + \log(x^2) - x^2 - 4}}.$$

Problema 26. Tome los datos que se dan en el Problema 6, y supónga que la suma de los productos de las edades de dos de ellos coincide con la dodécuple edad de Juan disminuida 36 años. ¿Cuántos años tiene cada uno de ellos?

Problema 27. Obtenga la ecuación de la recta que pase por los puntos (π, π) y (π, e).

Problema 28. Se tiene un terreno rectangular de 15 por 13 metros, en el cual se desea construir una fuente circular en el centro del terreno. Si el área de la superficie que va a ocupar la fuente será la vigésima parte del área de la superficie total del terreno, ¿cuál ha de ser el radio de la porción circular que se ha de considerar para construir la fuente?

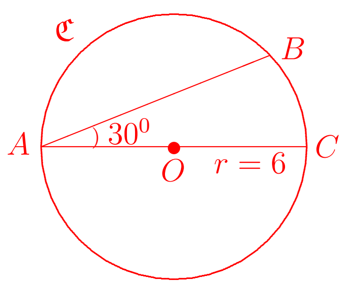
Problema 29. Se tienen dos triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C$, tales que los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$ son perpendiculares y tienen longitudes c y c' unidades, respectivamente, como se muestra en la figura



Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$ son las áreas de los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C$, res–pectivamente. Pruebe que

$$\mathcal{A} = \left(\frac{c}{c'}\right)^2 \mathcal{A}'.$$

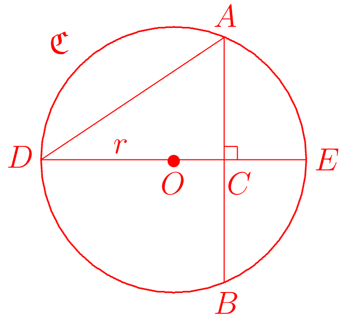
Problema 30. Considere un círculo $\mathfrak{C}$ con centro O y radio $r = 6$ unidades, y $\overline{AB}$ una cuerda de $\mathfrak{C}$ tal que el ángulo $\measuredangle BAC$ mide 30^0, como se muestra en la figura de abajo. ¿Cuál es el área de la región limitada por la cuerda $\overline{AB}$, el diámetro $\overline{AC}$ y el arco $\widehat{BC}$?



Problema 31. Encuentre el lugar geométrico en el plano cartesiano determinado por las parejas ordenadas (x, y) que satisfacen la ecuación algebraica

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2(1 - x - y).$$

Problema 32. Considere un círculo $\mathfrak{C}$ con centro O y radio r, y $\overline{AB}$ una cuerda que es perpendicular al diámetro $\overline{DE}$ de $\mathfrak{C}$, como se muestra en la figura. ¿Cuál es la longitud de la cuerda $\overline{AD}$ si la longitud del segmento $\overline{OC}$ es $\dfrac{1}{3}r$?



Problema 33. Con los datos del Problema 32, calcule el área limitada por los segmentos $\overline{AC}$, $\overline{CE}$ y el arco $\widehat{AE}$.

Problema 34. Obtenga lo mismo que en el Problema 31, para las siguientes ecuaciones:

(*i*) $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 2(7 + 2x - 3y)$.

(*ii*) $(x-5)^2 + (y+1)^2 = 2(12 - 10x + 2y)$.

Toda duda, comentario, crítica, sugerencia o correcciones a los problemas de esta guía, dirigirla a:

Rubén Mancio Toledo.

xolocuate@yahoo.com.mx, rmancio@esfm.ipn.mx

CONCURSO PIERRE FERMAT 2008
GUÍA PARA NIVEL MEDIA SUPERIOR

ESCUELA SUPERIOR DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS DEL I.P.N.

Problema 1. Hallar la suma de n términos de la serie

$$\frac{1}{(1+x)(1+2x)} + \frac{1}{(1+2x)(1+3x)} + \frac{1}{(1+3x)(1+4x)} + \cdots$$

Problema 2. Hallar un número que dividido por 39 dé resto 16 y dividido por 56 dé 27. ¿Cuántos números hay que cumplan estas condiciones?

Problema 3. Treinta hombres se comprometen a hacer una obra en 15 días. Al cabo de 9 días sólo han hecho los $\frac{3}{11}$ de la obra. Si el capataz refuerza la cuadrilla con 42 hombres, ¿podrán terminar la obra en el tiempo fijado o no, y si no es posible, cuantos días más necesitarán?

Problema 4. Se emplean 14 días para hacer una obra de 15 metros de largo, 8 metros de ancho y 4.75 metros de alto, a razón de 6 horas de trabajo cada día. Si se emplean ocho días en hacer otra obra del mismo ancho y de doble largo, trabajando 7 horas diarias, y siendo la dificultad de esta obra los $\frac{3}{4}$ de la anterior, ¿cuál es la altura de la obra?

Problema 5. Si n es primo y a, b son dos números menores que n, demuestre que

$$a^{n-2} + a^{n-3}b + a^{n-4}b^2 + \cdots + b^{n-2}$$

es un múltiplo de n.

Problema 6. Compruebe las siguientes igualdades:

$a)$ $\quad \ln \dfrac{\sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[10]{2}}{\sqrt[3]{18} \cdot \sqrt{2}} = \dfrac{1}{4} \ln 5 - \dfrac{2}{5} \ln 2 - \dfrac{2}{3} \ln 3.$

b) $\ln \frac{75}{16} - 2 \ln \frac{5}{9} + \ln \frac{32}{243} = \ln 2$

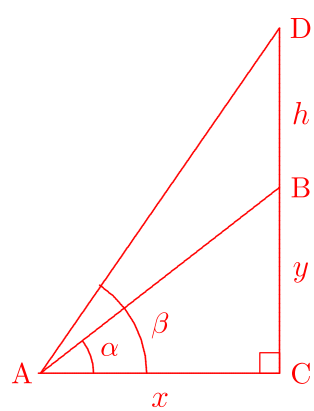
Problema 7. Resolver la ecuación

$$\left(a^4 - 2a^2b^2 + b^4\right)^{x-1} = (a-b)^{2x}\,(a+b)^{-2}.$$

Problema 8. Si se multiplican cuatro números enteros tomados al azar, demostrar que la probabilidad de que el último dígito del producto sea 1, 3, 7 ó 9 es $\frac{16}{625}$.

Problema 9. A es uno de los seis caballos que van a concursar en una carrera, y lo va a montar uno de los dos jinetes, B o C. Hay 2 a 1 de que B monte a A, en cuyo caso todos los caballos tienen iguales posibilidades de ganar; si C monta a A, su probabilidad se triplica: ¿cuáles son las apuestas en contra de su victoria?

Problema 10. En la figura



AC es perpendicular a DC. Los valores de α y β y la longitud de h se obtienen midiéndolos. Demostrar que la longitudes de $AC = x$ y de $BC = y$, en función de α, β y h están dadas por las fórmulas

$$x = \frac{h}{\tan\beta - \tan\alpha} \qquad y = \frac{h\tan\alpha}{\tan\beta - \tan\alpha}.$$

Problema 11. Un monumento de 25 metros de altura se eleva sobre una roca. Desde un punto al mismo nivel de la base de la roca se observa que los ángulos de elevación de la punta y de la base del monumento son $37°25'$ y $20°17'$, respectivamente. Calcular la altura de la roca.

Problema 12. Resolver la ecuación

$$\arctan 2x + \arctan 3x = \frac{\pi}{4}$$

.

Problema 13. Muestre que las expresiones

$$11x + 5y, \qquad 3x + 7y$$

son divisibles por 62 para el mismo conjunto de valores enteros de x y de y.

Problema 14. Muestre que si α, β y γ son los ángulos de un triángulo arbitrario, entonces:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\beta}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\gamma}{2}\right) < \frac{1}{4}\,.$$

Problema 15. Encuentre todos los números naturales n tales que $2^n + 1$ sea divisible por 3.

Problema 16. Si x_1 y x_2 son las raíces de la ecuación:

$$x^2 - (a + d)\,x + ad - bc = 0,$$

muestre que x_1^3 y x_2^3 son las raíces de la ecuación

$$y^2 - \left(a^3 + d^3 + 3abc + 3bcd\right) y + (ad - bc)^3 = 0\,.$$

Problema 17. Sea P el punto de la intersección de las rectas

$$y + 2x = 3, \qquad y - \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}\,.$$

a) Calcule las coordenadas de un punto Q tal que el segmento $\overline{PQ}$ sea la diagonal de un cuadrado de área uno.

b) ¿Existe un único punto con estas características?

Problema 18.

i) ¿Qué número es mayor $\sqrt[4]{3}$ o $\sqrt[3]{4}$?

ii) ¿Qué número es mayor $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ o $\sqrt[3]{3+\sqrt{2}}$?

Problema 19. Encuentre tres numeros naturales distintos de forma tal que la suma de sus recíprocos sea un entero.

Problema 20. Si a y b son enteros y si las soluciones del sistema de ecuaciones:

$$y - 2x - a = 0$$
$$y^2 - xy + x^2 - b = 0$$

son racionales, muestre que las soluciones x, y son enteras.

Problema 21. Divida los numeros

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$$

en dos conjuntos arbitrarios. Muestre que uno de los conjuntos contiene al menos dos numeros y su diferencia.

Problema 22. Muestre que el polinomio

$$x^4 + 2x^2 + 2x + 2$$

no es el producto de dos polinomios

$$x^2 + ax + b, \qquad x^2 + cx + d$$

en los cuales a, b, c, d sean enteros.

Problema 23. ¿Cuantos ceros tiene al final el número

$$1000! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots 999 \cdot 1000\,?$$

Problema 24. Sean los puntos $A = (1,3)$, $B = (3,2)$, suponga que estos puntos pertenecen a una circunferencia. Encuentre el centro de esa circunferencia suponiendo que si C es el centro, entonces el triángulo $\triangle ABC$ tiene área uno.

Problema 25. Unos piratas enterraron un tesoro en una isla en la siguiente forma: cerca de la playa había dos grandes rocas y una palmera. Uno de los piratas empezó a andar desde una de las rocas, y caminando perpendicularmente a la recta que une la roca con la palmera, midió a pasos una distancia igual a la que hay entre la roca y la palmera. Un segundo pirata hizo lo mismo respecto de la otra roca y la palmera. Luego se enterró el tesoro a la mitad de las posiciones ocupadas por los dos piratas. Años más tarde volvieron a la isla para desenterrar su tesoro, pero se encontraron que la palmera ya no estaba. ¿Cómo puede localizarse dicho tesoro?

Problema 26. Sobre los lados BC, CA y AB de un triángulo dado $\triangle ABC$ se eligen los puntos D, E y F de modo que

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{AB}} = \frac{1}{3}\,.$$

Demuestre que el área del triángulo formado por las tres rectas AD, BE y CF es un séptimo del área del triángulo dado.

Problema 27. La base AB del triángulo $\triangle ABC$ está dada en longitud y posición. Hallar el lugar geométrico del vértice C, cuando se da:

$a)$ $(CA)^2 - (CB)^2$,

$b)$ $(CA)^2 + (CB)^2$,

$c)$ $\dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}}$,

$d)$ el ángulo en el vértice C,

e) la diferencia de los ángulos A y B en la base.

Problema 28. Sean $\alpha = 0$, $\beta = 0$ y $\gamma = 0$ las ecuaciones de los lados de un triángulo $\triangle ABC$.

a) Demuestre que $r\beta\gamma + s\gamma\alpha + t\alpha\beta = 0$, siendo r, s, t constantes arbitrarias, representa una cónica circunscrita al triángulo, y que cualquier cónica circunscrita al mismo tiene una ecuación de esa forma.

b) Demuestre que las ecuaciones de las tangentes a la cónica de la parte *a*) en los vértices A, B, C son

$$\frac{\beta}{s} + \frac{\gamma}{t} = 0, \qquad \frac{\gamma}{t} + \frac{\alpha}{r} = 0, \qquad \frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{s} = 0\,.$$

c) Demuestre que las tangentes a una cónica en los vértices de un triángulo inscrito cortan a los lados opuestos en tres puntos colineales.

d) Demuestre que las rectas que unen los vértices de un triángulo a los puntos de contacto de los lados opuestos con una cónica inscrita son concurrentes.

Problema 29. Cierto alimento para animales es una mezcla de dos productos comestibles, A y B. Cada kilogramo de A contiene 100 unidades de proteínas, 18 de grasas y 400 de carbohidratos; cada kilogramo de B contiene 200 unidades de proteínas, 2 de grasa y 300 de carbohidratos. Una tienda de estos comestibles quiere poner en sacos una mezcla de A y B, cada uno de los cuales contenga al menos 500 unidades de proteínas, 18 de grasas y 1500 de carbohidratos. Si un kilogramos de A cuesta $\$30.00$ pesos y uno de B cuesta $\$40.00$ pesos, determinar el número de kilogramos de cada uno de estos productos que debe tener cada saco para que el costo sea mínimo.

Problema 30. La posición de un punto P en el plano de un triángulo fijo $\triangle ABC$ puede determinarse mediante los tres números

$$x_1 = \frac{\triangle\overline{BCP}}{\triangle\overline{ABC}}, \qquad x_2 = \frac{\triangle\overline{CAP}}{\triangle\overline{ABC}}, \qquad x_3 = \frac{\triangle\overline{ABP}}{\triangle\overline{ABC}}.$$

El triángulo $\triangle ABC$ se llama *triángulo de referencia*, y los números (x_1, x_2, x_3) reciben el nombre de *coordenadas de razones de áreas* (o *coordenadas areales*) de P.

a) Demuestre que $x_1 + x_2 + x_3 = 1$.

b) Demuestre que la posición de P queda determinada por dos cualesquiera de sus tres coordenadas de razones de áreas, y que dichas coordenadas de P están determinadas por tres números cualesquiera, no todos cero, proporcionales a ellas.

c) Demuestre que, mediante la relación de la parte a), toda ecuación polinómica en las variables x_1, x_2, x_3 puede hacerse hómogenea en x_1, x_2, x_3 y que cuando se hace, podemos emplear, en lugar de las coordenadas areales de razones de áreas de un punto, otras cantidades (no todas cero) proporcionales a ellas.

Problema 31. Demuestre que la ecuación de la tangente a la curva

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0$$

en el punto (x_0, y_0, z_0) es

$$axx_0 + byy_0 + czz_0 + f(yz_0 + y_0z) + g(zx_0 + z_0x) + h(xy_0 + x_0y) = 0.$$

Problema 32. Demuestre que

$$\frac{1}{\cos 0^\circ \cos 1^\circ} + \frac{1}{\cos 1^\circ \cos 2^\circ} + \cdots + \frac{1}{\cos 88^\circ \cos 89^\circ} = \frac{\cos 1^\circ}{\operatorname{sen}^2 1^\circ}.$$

Problema 33. Si $3x^3 - 9x^2 + kx - 12$ es divisible por $x - 3$, entonces también es divisible por *a*) $3x^2 - x + 4$ *c*) $3x^2 + 4$ *e*) $3x + 4$

b) $3x^2 - 4$ *d*) $3x - 4$

Problema 34. Se cumple la igualdad

$$\log p + \log q = \log (p + q),$$

sólo si:

a) $p = q = 0$ *c*) $p = q = 1$ e) $p = \dfrac{q}{q+1}$.

b) $p = \dfrac{q^2}{1-q}$ *d*) $p = \dfrac{q}{q-1}$

Problema 35. Un triángulo inscrito en una circunferencia de radio R, tiene un lado a, cuyo ángulo opuesto es agudo y un ángulo adyacente B. Demuestre que el área S del triángulo es

$$\frac{1}{4}\, a^2 \operatorname{sen} 2B + \frac{1}{4}\, a\,(1 - \cos 2B)\sqrt{4R^2 - a^2}\ .$$

Problema 36. ¿Para qué valor constante de k la expresión

$$\frac{\sec 2x + 1}{2 \sec 2x} + \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)\cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + \operatorname{sen}^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + k$$

será cero para todos los valores de x?

Problema 37. El ángulo de elevación de una torre que se encuentra al Sur de un lugar A es $30°$, y desde un lugar B, situado al Oeste de A y a una distancia a de él, la elevación es $18°$. Demostrar que la altura de la torre es

$$\frac{a}{\sqrt{2\sqrt{5} + 2}}\,.$$

Problema 38. Hallar la condición para que la ecuación

$$ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0$$

pueda tener dos raíces iguales.

Problema 39. Demostrar que dos de las cantidades x, y, z deben ser iguales si

$$\frac{y-z}{1+yz}-\frac{x-z}{1+zx}-\frac{y-x}{1+xy}=0.$$

Problema 40. Resolver la ecuación

$$\frac{x-a}{b}+\frac{x-b}{a}=\frac{b}{x-a}+\frac{a}{x-b}.$$

Problema 41. Si $\sqrt{a-x}+\sqrt{b-x}+\sqrt{c-x}=0$, demostrar que

$$(a+b+c+3x)(a+b+c-x)=4(bc+ca+ab),$$

y si $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}=0$, demostrar que $(a+b+c)^3=27abc$.

Problema 42. Un tren, una hora después de partir sufre un accidente que lo detiene una hora, después de la cual prosigue su camino a tres quintos de su velocidad anterior y llega a su destino tres horas depués de tiempo; pero si el accidente hubiera ocurrido 50 kilómetros más adelante, habría llegado solamente con hora y media de retraso. Hallar la longitud del recorrido.

Problema 43. Si las ecuaciones $ax+by=1, cx^2+dy^2=1$ tienen solamente una solución, demuestre que

$$\frac{a^2}{c}+\frac{b^2}{d}=1, \qquad x=\frac{a}{c}, \qquad y=\frac{b}{d}.$$

Problema 44. Resolver el sistema

$$\begin{aligned} x-y^2-z^2 &= -1 \\ x^2-y+z^2 &= 1 \\ x^2+y^2-z &= 1 \end{aligned}$$

Problema 45. Si $ay-bx=c\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$, demuestre que x e y están ligadas por una relación lineal si $c^2\leq a^2+b^2$.

Toda duda, comentario, crítica, sugerencia o correcciones a los problemas de esta guía, dirigirla a:

Rubén Mancio Toledo.

xolocuate@yahoo.com.mx, rmancio@esfm.ipn.mx

CONCURSO PIERRE FERMAT 2008
GUÍA PARA NIVEL SUPERIOR

ESCUELA SUPERIOR DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS DEL I.P.N.

Problema 1. Sea p el factor primo más pequeño de $n \in \mathbb{N}$. Demostrar que si $p > \sqrt[3]{n}$, entonces n/p es primo o es 1.

Problema 2. Sea $k \in \mathbb{Z}$. El entero k escrito en nuestro sistema posicional de base 10 se escribe como:

$$k = a_0 + a_1 10 + \cdots + a_n 10^n.$$

Demostrar que $11 \mid k$ si y sólo si $k \mid \sum\limits_{i=0}^{n} (-1)^i a_i$.

Problema 3. demostrar que:

$$\left(4^2 + 5^2\right)\left(2^2 + 3^2\right) = 23^2 + 2^2.$$

Problema 4. Sea n un número natural. Demostrar que el número de parejas ordenadas de números naturales (i, j) que se pueden formar bajo la condición $1 \leq i \leq j \leq n$, es $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Problema 5. Sean $\mathbb{F}_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ y $\mathbb{F}_m = \{1, 2, \ldots, m\}$. ¿Cuál es el número de funciones estrictamente crecientes de $\mathbb{F}_n$ a $\mathbb{F}_m$ que existen?

Problema 6. Sean n y m números naturales tales que $n \leq m$ y sean $\mathbb{F}_n$, $\mathbb{F}_m$ como en el Problema 5. Denótese por $\mathcal{S}_n^m$ al conjunto de todas las funciones suprayectivas de $\mathbb{F}_m$ a $\mathbb{F}_n$. Sean n y m números naturales tales que $1 \leq n \leq m$. Demostrar que

$$n^m = \mathcal{S}_n^m + \binom{n}{1}\mathcal{S}_{n-1}^m + \binom{n}{2}\mathcal{S}_{n-2}^m + \cdots + \binom{n}{n-1}.$$

Problema 7. Demostrar que el número real

$$\sqrt[3]{2 + \frac{10}{9}\sqrt{3}} + \sqrt[3]{2 - \frac{10}{9}\sqrt{3}}$$

es un número entero.

Problema 8. Sea n un número natural. Demostrar que el número de dígitos en la expresión en base 10 de n es igual a $\lfloor \log_{10}(n) \rfloor + 1$.[1] ¿Es posible generalizar este resultado a cualquier base k con $k < n$?

Problema 9. Sea n un número natural. Demostrar que si n es un cuadrado, entonces es divisible por 8 o el residuo de la división de n por 8 es 1 o 4.

Problema 10. Utilizar el Problema 9, para demostrar que la suma de los cuadrados de 1988 números naturales consecutivos no es un cuadrado.

Problema 11. Sea n un número natural. Se define el **n-ésimo número de Fermat** como $\mathsf{F}_n = 2^{2^n} + 1$. Sean n y m dos números naturales. Demostrar que F_n y F_m son primos relativos siempre que $n \neq m$. Deducir que existe una infinidad de números primos.

Problema 12. Sea $n \in \mathbb{N}$. Demostrar que para todo $\theta \in \mathbb{R}$

$$1 + 2\cos\theta + 2\cos 2\theta + \cdots + 2\cos((n-1)\theta) = \frac{\operatorname{sen}\left(n - \frac{1}{2}\right)\theta}{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}$$

$$\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen} 2\theta + \cdots + \operatorname{sen}((n-1)\theta) = \frac{\cos\frac{1}{2}\theta - \cos\left(n - \frac{1}{2}\right)\theta}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}\theta}$$

Problema 13. **Demostrar o refutar:** Si r_1, r_2, son dos números racionales diádicos tales que $r_1 < r_2$, entonces existe un número racional triádico t tal que $r_1 < t < r_2$.

Problema 14. Sea $(a_n)_n$ la sucesión de números reales construida de la siguiente manera:

$$a_1 > 0, \qquad a_{n+1} = \frac{1}{a_n + 2} \quad \text{para todo } n \geq 1.$$

Demostrar que la sucesión es convergente y encontrar su límite.

[1] Aquí la notación $\lfloor \log_{10}(n) \rfloor$ denota a la parte entera de $\log_{10}$.

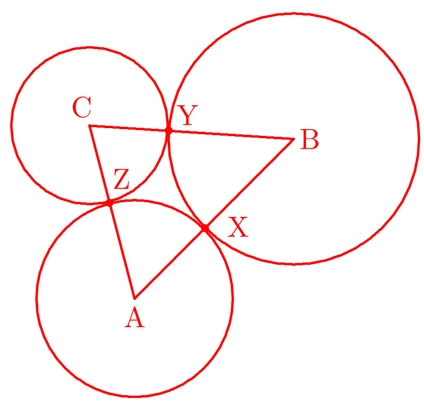
Problema 15. **Demostrar o refutar:** Toda sucesión $(a_n)_n$ de puntos del intervalo $[0,1]$ tiene una subsucesión de Cauchy.

Problema 16. Demostrar que el número real $\alpha = \sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}$ es un número irracional. ¿Sigue siendo irracional el número α si en vez de tres radicales se tienen cuatro radicales?

Problema 17. Si la sucesión $1,\ \sqrt{2},\ \sqrt{2\sqrt{2}},\ \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$ fuese convergente, ¿cuál sería su límite?

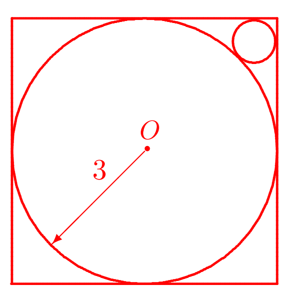
Problema 18. Encontrar las ecuaciones de dos parabolas intersecantes de manera que sus lados rectos sean los lados opuestos de un cuadrado.

Problema 19. Tres circunferencias tangentes y un triángulo se colocan según se muestra en la siguiente figura:

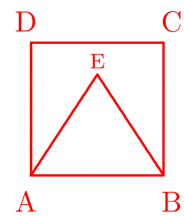


Los vértices del triángulo $\triangle \mathrm{ABC}$ son los centros de las tres circunferencias tangentes, respectivamente. Demostrar que los segmentos $\overline{\mathrm{CX}}$, $\overline{\mathrm{AY}}$ y $\overline{\mathrm{ZB}}$ son concurrentes. ¿Esta el punto de concurrencia de los segmentos fuera de las tres circunferencias?

Problema 20.
Una circunferencia de radio 3 se inscribe en un cuadrado tal cual se muestra en la figura. Encontrar el radio y el área de la circunferencia inscrita entre dos lados del cuadrado y la circunferencia original.



Problema 21.
En el cuadrado $\square\mathrm{ABCD}$ se ha colocado el triángulo $\triangle\mathrm{ABE}$ el cual es equilátero, encontrar el área de la porción del cuadrado que se encuentra fuera del triángulo.



Problema 22. Sea $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ el polinomio $p(x) = x^3 + kx^2 - x - 3$. Encontrar el valor de k, sabiendo que todas las raíces de $p(x)$ son racionales y están en progresión aritmética.

Problema 23. En el conjunto de números reales $\mathbb{R}$, defínanse las siguientes operaciones:

$$r_1 \oplus r_2 = r_1 + r_2 \quad \text{para cada par de elementos } r_1, r_2 \in \mathbb{R},$$

$$q \odot r = qr \quad \text{para todo } q \in \mathbb{Q} \text{ y para todo } r \in \mathbb{R}.$$

i) Demostrar que $(\mathbb{R}, \oplus, \odot)$ es un espacio vectorial sobre el campo de los números racionales $\mathbb{Q}$.

ii) Demostrar que el conjunto $\{1, r\} \subseteq \mathbb{R}$ es linealmente independiente si y sólo si r es un número irracional.

iii) ¿Cuál es la dimensión del $\mathbb{Q}$–espacio vectorial $\mathbb{R}$?

Problema 24. Sea A una matriz $n \times n$ con entradas en el campo de los números reales y que satisface la ecuación

$$\mathrm{A}^2 + 2\mathrm{A} + \mathrm{I}_n = \mathcal{O}_n. \tag{1}$$

En donde $\mathcal{O}_n$ es la matriz cero e I_n es la matriz identidad. Demostrar que A es invertible. ¿Existe una ecuación semejante a la ecuación 1, mediante la cual se pueda calcular A^{-1}?

Problema 25. Sea $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$[2] tal que $\mathrm{AB} = \mathrm{BA}$ para toda matriz $\mathrm{B} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Demostrar que $\mathrm{A} = a\mathrm{I}_n$ para algún $a \in \mathbb{R}$.

[2] Aquí $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ denota al conjunto de matrices de tamaño 2×2 con entradas en el conjunto de números reales $\mathbb{R}$.

Problema 26. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua tal que:

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) \quad \text{para todo } x_1, x_2 \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Demostrar que existe una constante $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \lambda x.$$[3]

Problema 27. Sea $\mathcal{Q}$ una enumeración de los racionales en el intervalo $[0,1]$. Sea $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ la función

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ x \in \mathcal{Q} \\ 1 & \text{en cualesquiera otro caso} \end{cases}.$$

Encontrar el conjunto de puntos de discontinuidad de φ.

Problema 28. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } \ x \neq 0 \\ 0 & \text{si } \ x = 0 \end{cases}.$$

$i)$ Demostrar que f es continua.

$ii)$ Demostrar que para cada $n \in \mathbb{N}$, la n–ésima derivada de f existe y es continua en cada $x \in \mathbb{R}$.

$iii)$ Demostrar que para cada $k \in \mathbb{N}$, el polinomio de Taylor de orden k alrededor de 0 de la función f es el polinomio cero.

$iv)$ Interpretar geométricamente el inciso (iii).

$v)$ ¿Es f analítica en 0?

$vi)$ ¿Es cierto que es posible encontrar $\beta > 0$ tal que f sea integrable en $[-\beta, \beta]$ y tal que $\displaystyle\int_{-\beta}^{\beta} f(x)\,dx = 0$?

Problema 29. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en 0 y tal que

$i)$ $f \neq 0$ en $\mathbb{R}$.

$ii)$ $f(a+b) = f(a)\,f(b)$ para todo par de puntos $a, b \in \mathbb{R}$.

[3] Este es un problema clásico y la ecuación 2, se conoce con el nombre de *ecuación funcional de Cauchy*. El lector interesado, puede intentar demostrar el resultado más general suponiendo que f es una función Lebesgue–medible en $\mathbb{R}$.

Demostrar que f es diferenciable y que $f'(x) = f'(0)\, f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Problema 30. Encontrar los puntos de la curva $\alpha(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 1$ en donde la recta tangente sea ortogonal a la recta $y = 6x$.

Problema 31. Sea $j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función $j(x) = \dfrac{|x|}{1+|x|}$.

$i)$ **Demostrar o refutar:**

$a)$ j es continua en 0.

$b)$ j es derivable en 0.

$c)$ En 0 existe el único punto extremo de la función j.

$ii)$ Graficar completamente la funciones j y j'.

$iii)$ ¿Cuántas discontinuidades esenciales tiene j'? ¿cómo influyen las discontinuidades esenciales de j' en la función f?[4]

Problema 32. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Demostrar que f es derivable en 0. ¿En qué puntos de $\mathbb{R}$ es la función f continua?

Problema 33. Si a un número real y f es una función de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$, denótese por $f'_+(a)$ a la derivada por la derecha de f en a y por $f'_-(a)$ a la derivada por la izquierda de f en a.

$i)$ ¿Puede construirse una función continua $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\phi'_+(k) \neq \phi'_-(k)$ para todo número entero k?

$ii)$ ¿Existirá una función $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que los únicos puntos z de $\mathbb{R}$ para los cuales $\psi'_+(z) \neq \psi'_-(z)$ sean los irracionales?

$iii)$ ¿Existirá un función $\ell : [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que $\ell'_+\left(\frac{1}{n}\right) \neq \ell'_-\left(\frac{1}{n}\right)$ para todo n número natural?[5]

[4] Algunas veces las discontinuidades esenciales reciben el nombre de *discontinuidades no removibles o no evitables*.

[5] Adviértase que tanto este inciso como el anterior, admiten por lo menos dos respuestas.

Problema 34. Sean $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ números reales. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función:

$$g(x) = \frac{\alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_n x^n}{\beta_1 x + \beta_2 x^2 + \cdots + \beta_m x^m}$$

Explorar la continuidad y la derivabilidad de la función g en 0.

Problema 35. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable con derivada acotada. Demostrar que existe una constante $k \in \mathbb{R}$ tal que la función $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $\phi(x) = x + kf(x)$ es una biyección con inversa derivable. ¿No es necesario que la derivada de f sea además, continua?

Problema 36. Sea $b \in \mathbb{R}$ con $b > 1$ y sea $\mathcal{N} = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$. Considérese la recta $\mathcal{L}$ de ecuación $y - x = 0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, elíjase un punto a_n tal que $\frac{1}{n+1} < a_n < \frac{1}{n}$. Sea $\varphi : [0, b] \to \mathbb{R}$ la función "poligonal" que une el punto $(b, 0)$ con $(1, 1)$ con $(a_1, 0)$ con $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ con $(a_2, 0)$ con $\cdots$.

$i)$ ¿Es la función φ continua?

$ii)$ ¿Es la función φ derivable en 0?

$iii)$ ¿En qué puntos del intervalo $[-1, b]$ no es la función φ derivable?

$iv)$ ¿Es la función φ integrable en en el intervalo $[0, b]$?, de ser así, encontrar $\displaystyle\int_0^b \varphi(x)\, dx$.

Problema 37. Considérese $\psi : [0, 1] \to \mathbb{R}$ la *función de Dirichlet*, $\psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$. Construir una sucesión $(g_n)_n$ de funciones integrables en $[0, 1]$ que converja a ψ.

Problema 38. Sea $x \in [0, 1]$ y supóngase que x tiene expansión decimal $x = 0.a_1 a_2 a_3 \cdots a_n \cdots$. Sea $\phi : [0, 1] \to [0, 1]$ la función:

$$\phi(x) = 0.a_1 a_3 a_5 a_7 \cdots .$$

$i)$ ¿Es ϕ monótona?

$ii)$ ¿Es ϕ continua?

$iii)$ ¿Cuáles son los puntos de discontinuidad de ϕ.

$iv)$ ¿Es ϕ integrable en $\in [0,1]$.

Problema 39. Encontrar los puntos extremos locales de la función:

$$g(x,y) = \ln\left(1 + x^2 + y^2\right) - \int_0^x \frac{2t dt}{1+t^4}\,.$$

Problema 40. Sea $\mathrm{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, una función tal que $\dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}$, $\dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial y}$ existen y son continuas en $\mathbb{R}^2$. Suponer además, que se cumple la condición:

$$\frac{\partial \mathrm{F}(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial \mathrm{F}(x,y)}{\partial y} \quad \text{para todo} \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Demostrar que existe una función derivable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que

$$\mathrm{F}(x,y) = f(x+y)\,.$$

Problema 41. Sea $(a_n)_n$ la sucesión de números reales siguiente:

$$a_n = \int_{-n}^{n} e^{-|t|} \operatorname{sen}\left(t^2\right) dt.$$

Demostrar que la sucesión $(a_n)_n$ es convergente. ¿Puede decir cuál es el límite de la sucesión?

Problema 42. ¿Es posible dar un ejemplo de una función no integrable en el intervalo $[-1,1]$, pero que si tenga primitiva en ese intervalo?

Problema 43. Demostrar que

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{n^{n+1} + (n+1)^n}{n^{n+1}}\right)^n = e^e.$$

Problema 44. Demostrar que

$$\lim_{n \to +\infty} n\left(\sqrt{n} - 1\right) = \ln(a)\,.$$

Problema 45. Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función acotada y sea $(a_n)_n$ la sucesión de números reales definida por:

$$a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

$i)$ Demostrar que si f es integrable en $[0,1]$ entonces

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \int_0^1 f(x)\,dx$$

$ii)$ Dar un ejemplo de de una función f tal que la sucesión $(a_n)_n$ converja, pero que f no sea integrable en $[0,1]$.

$iii)$ **Demostrar o refutar:** Si la sucesión $(a_n)_n$ diverge, entonces f no es integrable en $[0,1]$.

Problema 46. Sea $\psi : [-1,1] \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$\psi(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ x & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

$i)$ ¿Es ψ integrable en $[-1,1]$?

$ii)$ ¿Es $|\psi|$ integrable en $[-1,1]$?

$iii)$ En su caso, encontrar $\displaystyle\int_{-1}^{1} \psi(x)\,dx$ o $\displaystyle\int_{-1}^{1} |\psi|(x)\,dx$.

Problema 47. Calcular las siguientes integrales.

$i)$ $\displaystyle\int_0^4 \frac{|x-1|}{|x-2|+|x-3|}\,dx$ $\qquad ii)$ $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x|\,dx$

$iii)$ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x + \cos x}\,dx$

Problema 48. Sea $\beta \in [-1,1]$ y sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ \beta & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

¿Para qué valores de β tiene f una primitiva en $[-1,1]$?

Problema 49. Utilizando una integral adecuada, calcular los siguientes límtes:

$i)$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n} \right).$

ii) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^3+1}+\dfrac{1}{n^3+2^3}+\cdots+\dfrac{1}{2n^3}\right).$

iii) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdot\cdots\cdot(n+n)}\,.$

Problema 50. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x)=\begin{cases} x^2\operatorname{sen}^2\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x\neq 0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}.$$

Sea $\phi:[-1,0]\to\mathbb{R}$ la función:

$$\phi(w)=\int_{-1}^{w}f(x)\,dx.$$

i) Demostrar que f es derivable en 0.

ii) Demostrar que $0<\phi(w)<1$ siempre que $-1<w<0$.

iii) ¿Existe $\lim\limits_{w\to 0}\phi(x)$?

Toda duda, comentario, crítica, sugerencia o correcciones a los problemas de esta guía, dirigirla a:

Rubén Mancio Toledo.

xolocuate@yahoo.com.mx, rmancio@esfm.ipn.mx