CONCURSO NACIONAL DE MATEMÁTICAS

PIERRE FERMAT

2007

GUÍA PARA NIVEL SECUNDARIA

Patrocinado por:

Sociedad Matemática Mexicana

Texas Instruments

Universidad Anáhuac

GlobalBook

COBI, Coorporación Bibliográfica, S. A. de C. V.

Instituto Politécnico nacional

1. Presentación

Uno de los objetivos fundamentales de la Escuela Superior de Física y Matemáticas del Instituto Politécnico Nacional, ha sido el de contribuir a la formación de profesionistas en Matemáticas a nivel de licenciatura y posgrado, con la finalidad de que puedan ser capaces de integrarse, al término de sus estudios, a áreas diversas como son la investigación, el desarrollo tecnológico y la docencia, entre otras. Todo esto motiva a la institución a organizar eventos y actividades conducentes a despertar en los estudiantes de los niveles de secundaria, medio superior y superior el gusto por las Matemáticas. Bajo este contexto, la Escuela Superior de Física y Matemáticas, se ha dado a la tarea de organizar el **Concurso Nacional de Matemáticas Pierre Fermat**, desde el año 1990.

2. Breve semblanza de Pierre Fermat

A principios de siglo XVII nace uno de los genios más singulares de la historia *M. Pierre de Fermat*, hijo de burgueses, el 17 de agosto de 1601 en Beaumont-de-Lomagne. Educado en Orléans y Tolouse estudia, en este último, la carrera de leyes y sus relaciones familiares le permitieron ocupar puestos como Consejero del Parlamento y Comisionario de la Chambre de Requêtes du Paris (1631) y de la Grande Chambre (1654), cuyos cargos le facilitaron disfrutar de ocio necesario para elaborar una obra que a más de cuatrocientos de su nacimiento hace de su nombre parte de nuestra cultura científica y que le han permitido conocerlo generalmente como el padre de la Teoría de Números Moderna. Gran parte de la inspiración de Fermat deriva de los trabajos de Diofanto, fue el primero en descubrir propiedades realmente profundas de los números enteros, contribuyó además en la construcción de la geometría analítica, diseñando técnicas que serían incorporadas al naciente cálculo infinitesimal. Con Pascal estableció las ideas básicas de la teoría de la probabilidad, propuso el principio óptico que lleva su nombre, diseño el método de demostración del descenso infinito,

mostró el potencial de las demostración por inducción; además, propuso lo que por casi cuatro siglos representó el sueño inalcanzable, y que permitió que gran parte de la Teoría de Números Algebraicos fuera desarrollada por los intentos de Kummer y sus contemporáneos para resolver el problema conocido como el *Último Teorema de Fermat*.

Para muchos de sus contemporáneos, Fermat fue un hombre de diversos matices. Descartes lo llamó fanfarrón, debido quizá a la imposibilidad del primer filósofo de la modernidad de descalificarlo en cuanto a su inteligencia y vastos conocimientos matemáticos. Marin Mersenne, con quien intercambio correspondencia, se refirió a él como el muy ilustrado hombre de Toulouse, mientras que Pascal, que poseía un gran intelecto y un talento inusual para el pensamiento matemático, lo calificó como el más grande matemático de Europa, lo cual pudo incomodar a Descartes. Wallis con quien sotuvo una polémica en cuanto a la importancia de sus resultados, se refería a él como ese máldito francés.

La fama de Fermat está fuertemente vinculada con una nota que hizo sobre el margen de un ejemplar de la *Arithmetica* de Diofanto. Este ejemplar con las anotaciones de Fermat se ha perdido y sólo se conoce de su existencia por la publicación de una edición de la *Arithmetica* por Samuel Fermat, su hijo. En está edición, el hijo transcribió la nota de su padre bajo los textos griego y latino de la pregunta 8 del libro 2 de Diofanto, la nota dice textualmente:

Observatio Domini Petri De Fermat

Cubum autem in dous cubos, aut quadrato quadratum in duos quadrato quadratos, et generaliter nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duos eiusdem nominis fas est dividere: cuius rei demostrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caparet.

La traducción aproximada es:

Observación del Señor Pierre De Fermat

Es imposible separar un cubo en dos cubos, o una cuarta potencia en dos cuartas potencias o, en general, cualquier potencia mayor que la segunda en dos potencias similares. He descubierto una demostración verdaderamente maravillosa de esto, pero este margen es demasiado pequeño y no cabe.

En notación matemática es: si $n \geq 3$ es un entero, entonces la ecuación $x^n + y^n = z^n$ no tiene soluciones enteras con $xyz \neq 0$.

En 1994 el matemático inglés Andrew Wiles, de la Universidad de Princeton, logró dar la demostración, utilizando argumentos que ciertamente no caben en el margen de cualquier libro.

3. Concurso Pierre Fermat 2007

El **Concurso Nacional de Matemáticas Pierre Fermat**, contempla tres categorías: *secundaria, media superior* y *superior*. Tal concurso se realizará en dos étapas: *eliminatoria* y *final*. La primera consiste de un examen de 25 a 30 preguntas de opción múltiple a resolverse en 3 horas. La étapa final consta de un examen escrito de 5 problemas de respuesta abierta (en cada nivel), con un tiempo de 4 horas para su solución.

4. Bases del concurso

Estar inscrito durante el ciclo escolar 2006-2007 en alguna institución pública o privada dentro del país, en el nivel escolar correspondiente. No se considera límite de edad, ni semestre ó año en el que se encuentre inscrito. Se deberá presentar comprobante de estudios vigente al momento de registrarse (credencial o constancia).

5. Premios

Diploma de participación para todos los concursantes y, a su vez, se premiará cada categoría, quedando a criterio del jurado la posibilidad de declarar desierta algún lugar de cada categoría. Tenemos además un

total de al menos once menciones honoríficas. Los ganadores de cada categoría obtendrán premios en efectivo, medallas, libros, y para los ganadores de nivel medio superior y superior habrá calculadoras.

6. Premiación

Se llevará a cabo el día 7 de diciembre del año 2007 a las 12 hrs., en el Auditorio *Dr. Víctor Flores Maldonado* de la Escuela Superior de Física y Matemáticas del Instituto Politécnico Nacional.

7. Inscripciones

La inscripción no tiene costo y se realizará del 18 de junio al 12 de octubre del 2007, en la sede donde se desee presentar el examen de la etapa eliminatoria (consultar www.esfm.ipn.mx/∼fermat).

8. Examen de la etapa eliminatoria

Para todos los niveles, el sábado 27 de octubre del 2007, de las 10 : 00 a las 13 : 00 hrs., en las sedes donde se inscribió.

9. Examen de la etapa final

Para todos los niveles, el sábado 24 de noviembre del 2007 de las 10 : 00 a las 14 : 00 hrs., en la Escuela Superior de Física y Matemáticas del IPN y sedes alternas.

10. Sedes

Escuela Superior de Física y Matemáticas del IPN.
Unidad Profesional *Adolfo López Mateos* del IPN, Edificio 9, Colonia Zacatenco, C.P. 07738, Depto. de Matemáticas, México, D. F.
Tel. 57 29 60 00 ext. 55011 y 55018
`Responsables:` Pablo Lam Estrada, Hugo Méndez Delgadillo.
`Modalidad:` Todos los niveles.

Colegio Panamericano Texcoco, Secundaria y Preparatoria S. C.
Carr. Molino de Flores, Calle Privada de Crisantemos # 3, Fracc. la Paz, Texcoco, Edo. de México.
Tel. (01 595) 95 51 385 ext. 104.
`Responsable:` Fís. Fernando Chávez León.
`Modalidad:` Secundaria y Medio Superior.

Escuela Preparatoria de Matehuala, Universidad Autónoma de San Luis Potosí.
Paseo Angel Veral s/n, Colonia Santa Martha, C.P. 78700. Matehuala San Luis Potosí.
Tel. 01 (488) 88 20106.
`Responsable:` Fís. Hugo Ariel Nava Sauceda.
`Modalidad:` Todos los niveles.
`Sedes alternas:` **Río Verde, San Luis Potosí y Cd. Valles.**

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.
Edificios 158 y 190 Ciudad Universitaria. Avenida San Claudio y Río Verde s/n, Col. Jardines de San Manuel, Puebla, Pue. C.P. 72570
Tel. (222) 2 29 55 00 ext. 7578.
`Responsable:` Dra. María Araceli Juárez Ramírez.
`Modalidad:` Todos los niveles.

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas de la Universidad Autónoma de Nuevo León.
Ciudad Universitaria s/n. Apartado Postal 101-F, San Nicolás de los Garza NL. C. P. 66450.
Tel (01 81) 83 29 40 30 ext. 6230
`Responsable:` Alfredo Alanís Durán.
`Modalidad:` Todos los niveles.

Facultad de Matemáticas, Universidad Veracruzana

Circuito Gonzalo Aguirre Beltrán s/n. Zona Universitaria, C. P. 91060.
Xalapa, Veracruz, México.
Tel (228) 8 42 17 45, Fax (228) 1 41 10 45
Responsable: Dr. Raquiel R. López Martínez.
Modalidad: Todos los niveles.

Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica de la Universidad Autónoma de Colima.

Km. 9 carretera Colima a Coquimatlan. Coquimatlan, Colima.
Tel/Fax (316) 316 11 65
Responsable: M. en I. Martín Eliseo Isaías Ramírez.
Modalidad: Todos los niveles.

Universidad Autónoma Benito Juárez de Oaxaca.

Ciudad Universitaria s/n. Av. Universidad. Exhacienda de los cinco señores Oaxaca, Oax. C. P. 68000. Tel (951) 516 37 10 y 11.
Responsable: José Luis Morales Cuevas.
Modalidad: Todos los niveles.
Sedes alterna: **Instituto de Ciencias de la Educación.**

Instituto Tecnológico Superior de Teziutlán

Fracción I y II, Aire Libre, La Mina, Teziutlán, Puebla. C. P. 73960
Tel (01 - 231) 31 - 14 000 ext. 118.
Responsable: Maestro Gustavo Urbano Juárez.
Modalidad: Medio Superior y Superior.

Universidad Autónoma de Aguascalientes

Departamento de Matemáticas y Física, edificio 26.
Av. Universidad no. 940, Ciudad Universitaria.
C.P. 20100 Aguascalientes, Ags.
Responsable: Prof. Roberto Ku Carrillo.
Modalidad: Medio Superior y Superior.

Universidad de Guadalajara

Avenida Revolución # 1500, edif. V, Guadalajara Jalisco.

C. P. 44420

Tel (01-33) 36199552

`Responsables:` María Eugenia Guzmán Flores, Juan Martín Casillas.

`Modalidad:` Todos los niveles.

Universidad Valle de Grijalva.

Escuela de Ciencias de la Educación, Campus Centro, Cerrada Bugambilia # 137, Fracc. Bugambilia, C.P. 29020, Tuxtla Gutierrez, Chiapas.

Tel. 01 961 61 52840 ext. 194.

`Responsable:` M. en C. Fernando Alfonso Jiménez Méndez.

`Modalidad:` Todos los niveles.

Grupo Educativo Instituto San Carlos.

Vía Morelos No. 182, Colonia Nuevo Laredo.

Ecatepec, Estado de México.

Tel. 57 70 08 24

`Responsable:` Lic. Guillermina Ávila García..

`Modalidad:` Nivel secundaria.

Información de sedes, guías, cartel y avances del concurso en:

www.esfm.ipn.mx/~fermat

Dudas y comentarios en:

fermat@esfm.ipn.mx

COMITÉ ORGANIZADOR

Adolfo Escamilla Esquivel

Director ESFM–IPN

Francisco Ramírez Reyes

Jefa del Departamento de Matemáticas ESFM–IPN

Abelardo Santaella Quintas

Coordinador General

Pablo Lam Estrada

Hugo Méndez Delgadillo

Adrián Alcántar Torres

Salvador Quintín Flores García

Rubén S. Mancio Toledo

Coordinadores

Abelardo Santaella Quintas

Pablo Lam Estrada

Hugo Méndez Delgadillo

Elaboración y Revisión de Guías

Heriberto Casarrubias Vargas

Jorge Jair Herrera Flores

Apoyo Técnico

11. Ganadores del Concurso Pierre Fermat 2006

Superior	
Primer lugar	**David José Fernández Bretón** Escuela Superior de Física y Matemáticas del Instituto Politécnico Nacional
Segundo lugar	**Cristos Alberto Ruiz Toscano** Facultad de Matemáticas Universidad de Guanajuato
Tercer lugar	**José Hernández Santiago** Universidad Tecnológica de la Mixteca

Media superior	
Primer lugar	**Fernando Campos García** Escuela Nacional Preparatoria Plantel 5 José Vasconcelos, UNAM
Segundo lugar	**Valente Ramírez García Luna** Instituto Tecnológico de Estudios Superiores Monterrey, Campus San Luis Potosí
Tercer lugar	**Marlors Emilio Espinosa Lara** Escuela Preparatoria No. 7 Universidad de Guadalajara

Secundaria	
Primer lugar	**Arturo Sánchez González** TEC 25 (sede BUAP)
Segundo lugar	**Abraham Jiménez Pacheco** DGB 2 (sede BUAP)
Tercer lugar	**Isamar Ortíz Hernández** Instituto Minerva, Perote Veracruz

12. Menciones Honoríficas del Concurso Pierre Fermat 2006

Superior	
Jonathan Toledo Toledo	Escuela Superior de Física y Matemáticas del Instituto Politécnico Nacional
Marco Antonio Figueroa Ibarra	Facultad de Matemáticas Universidad de Guanajuato
Alexandre Ramos Peón	Facultad de Matemáticas Universidad de Guanajuato
Oscar Montiel González	Facultad de Ciencias Físico Matemáticas Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Medio superior	
Manuel Alejandro Bustos Manriquez	Bachillerato Técnico No. 4 FIME de la Universidad de Colima
Manuel Alejandro Abad Najar	Bachillerato Técnico No. 4 FIME de la Universidad de Colima
Ariel Chávez González	Minatitlán, Veracruz Universidad Valle de Grijalva
Lourdes Cruz González	Cecyt No. 9 Juan de Dios Bátiz del Instituto Politécnico Nacional
Jorge Michell Nuñez Reyna	Colegio de Bachilleres No. 25 del Estado de San Luis Potosí

Secundaria	
Erika Beatriz Ugalde Olivarez	Institución Educativa Héroes de la Libertad, A. C.

CONCURSO PIERRE FERMAT 2007, GUÍA PARA NIVEL SECUNDARIA

ESCUELA SUPERIOR DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS DEL I.P.N.

Problema 1. Considere los siguientes conjuntos: $A = \{\{\alpha\},\ \gamma\}$, $B = \{\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \epsilon\}$ y $C = \{\beta,\ \delta,\ \epsilon\}$. Calcule los conjuntos $B \setminus C$, $A \setminus C$ y $B \setminus A$.

Problema 2. Considere los siguientes conjuntos:

$$A = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\},\ B = \{5,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12\} \text{ y}$$
$$C = \{0,\ 8,\ 11,\ 13,\ 15\}.$$

Obtenga el conjunto $[(A \cap C) \cap (C \cup B)] \cup (A \cap B)$.

Problema 3. Considere los siguientes conjuntos: $A = \{\{1\},\ \emptyset,\ \pi\}$ y $B = \{\{1,2\},\ \emptyset,\ e,\ \cos(1),\ \pi\}$. Obtenga el conjunto $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Problema 4. Escriba en notación conjuntista el conjunto de todos los números naturales los cuales al dividirlos entre 4 da como residuo 1.

Problema 5. ¿Cuál es la veracidad del enunciado: "*Todos los números primos son compuestos o determinan la descomposición de los números enteros*"?

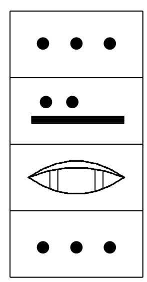
Problema 6. De los números -768.9608, -768.961, -768.96007 y -768.96071, ¿cuál es el más grande al número -768.9607?

Problema 7. Si $n, m \in \mathbb{N}$ con $n < m$, pruebe que se cumple la desigualdad

$$\frac{n + 5m}{5} < n + m.$$

Problema 8. ¿Cuál es la base del sistema de numeración maya?

Problema 9. Convierta el número maya



al sistema decimal.

Problema 10. ¿Cuál de las siguientes fracciones

$$\frac{3378}{125}, \quad \frac{3379}{125}, \quad \frac{3380}{125} \quad \text{y} \quad \frac{3381}{125}$$

está entre los números 27.031 y 27.033?

Problema 11. Dé la fracción simplificada que corresponde al número decimal 34.0765.

Problema 12. Una familia invierte en un banco la cantidad de \$ 25 350.00 a una tasa de 3.5 % anual durante 4.5 meses. Al vencimiento de éste, se incrementa el capital obtenido (capital más intereses) en $2\frac{3}{4}$ del capital inicial y se invierte el total a una tasa de 3 % anual durante 6 meses. ¿Cuál es el interés obtenido durante los 10.5 meses?

Problema 13. Juan compró herramienta de carpintería que requería para hacer un mueble para su casa. Al solicitar su factura, Juan observó que pagó por la herramienta la cantidad de \$ 2 763.89. ¿Cuánto pagó en total si le cobraron el 15 % de impuesto al valor agregado?

Problema 14. Establezca si la siguiente proposición es verdadera o falsa: "*Un número natural es divisible entre* 42 *si es divisible entre* 2, *entre* 3 *y entre* 7".

Problema 15. Calcule el máximo común divisor de los números 1 680, 1 260 y 2 100.

Problema 16. Calcule el mínimo común múltiplo de los números 990, 1 320 y 3 630.

Problema 17. En un grupo de alumnos de una secundaria, se realizó un examen de matemáticas para calificar las habilidades de los mismos. La tercera parte del grupo obtuvo una calificación menor ó igual a 7; del resto de los alumnos, la mitad obtuvo calificación de 8, y dos terceras partes de los que quedaron obtuvieron calificación de 9. Si el grupo es de 36 alumnos, ¿cuántos alumnos obtuvieron una calificación de 10?

Problema 18. Complete la siguiente pirámide de números

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 2 & & 2 & & & & \\
 & & & 3 & & 4 & & 3 & & & \\
 & & 4 & & 11 & & 10 & & 4 & & \\
 & 5 & & 37 & & 51 & & 22 & & 5 & \\
6 & & \_ & & \_ & & \_ & & \_ & & 6
\end{array}
$$

Problema 19. Considerando que los meses son de 30 días, calcule la suma de los siguientes números denominados es:

$$
\begin{array}{rrrrr}
 & 12 \text{ años} & 3 \text{ meses} & 27 \text{ días} & 13 \text{ horas} \\
+ & 3 \text{ años} & 6 \text{ meses} & 13 \text{ días} & 17 \text{ horas} \\
 & 5 \text{ años} & 2 \text{ meses} & 6 \text{ días} & 16 \text{ horas} \\
\hline
\end{array}
$$

Problema 20. La sustracción de los siguientes números denominados es:

$$
\begin{array}{rrrr}
- & 224^\circ & 17' & 43'' \\
 & 133^\circ & 38' & 57'' \\
\hline
\end{array}
$$

Problema 21. Simplifique la fracción

$$\frac{a^2 + a^3 - ab^2 + a^2b - b^2 - b^3}{a^2 - b^2}.$$

Problema 22. Encuentre todas las parejas (x, y) que sean solución del sistema de ecuaciones

$$
\begin{aligned}
x^2 + y^2 &= 2 \\
xy &= 1
\end{aligned}
$$

Problema 23. Encuentre la solución x de la siguiente ecuación:

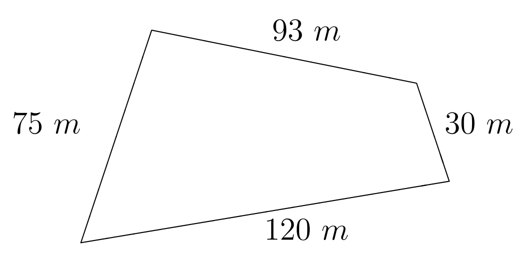
$$\frac{3x-1}{5-\dfrac{2}{3x}} = x+1.$$

Problema 24. Encuentre números reales a y b tales que las parejas $(1,4)$ y $(-1,-2)$ pertenezcan a la gráfica de la función $y = ax^2+bx+5$.

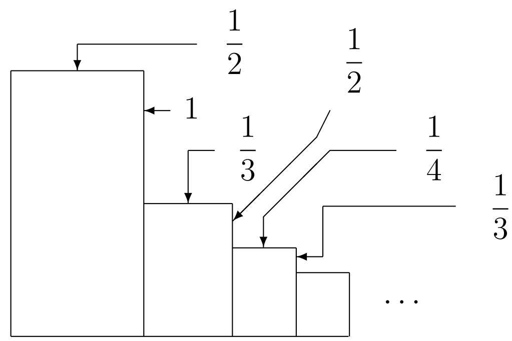
Problema 25. Encuentre los números reales x que satisfagan la ecuación

$$2^{x(x+1)/2} = 100.$$

Problema 26. Calcule el área del siguiente cuadrilátero:



Problema 27. Considere 99 rectángulos como se muestra en la figura

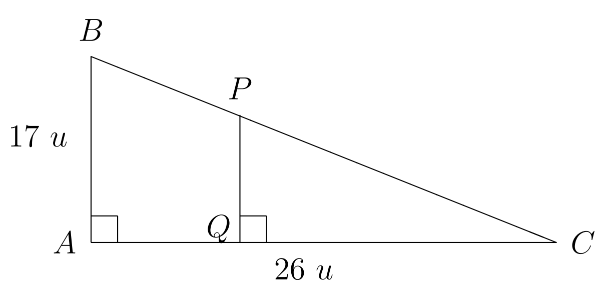


Calcule el área total de los rectángulos.

Problema 28. Justifique que la siguiente relación es cierta:

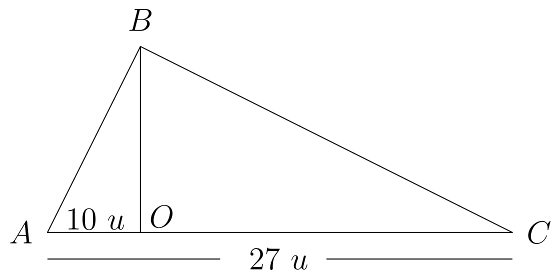
$$\cos^2(25^\circ\ 36'') + \operatorname{sen}^2(25^\circ\ 36'') = 1.$$

Problema 29. Considere el triángulo rectángulo $\triangle ABC$, en el cual el segmento $\overline{BP}$ tiene longitud de un tercio de la longitud del segmento $\overline{BC}$. Supóngase que la longitud del segmento $\overline{AB}$ es de 17 unidades y que la longitud del segmento $\overline{AC}$ es de 26 unidades, como se muestra en la figura



Calcule el área del cuadrilátero $\square ABPQ$.

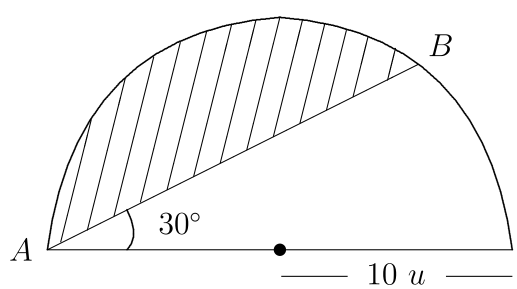
Problema 30. Considera el triángulo rectángulo $\triangle ABC$, con ángulo recto en el vértice B. El segmento $\overline{BO}$ es la altura del triángulo $\triangle ABC$, como se muestra en la figura



Supóngase que la longitud del segmento $\overline{AO}$ es de 10 unidades y la de $\overline{AC}$ es 27 unidades. Calcule la longitud del segmento $\overline{AB}$.

Problema 31. ¿Cuáles pueden ser las dimensiones de los lados de un triángulo rectángulo tal que uno de sus ángulos θ satisfaga que $\tan(\theta) = 2$?

Problema 32. Considere la región limitada por una semicircunferencia C de radio 10 unidades y su diámetro; además, de la cuerda $\overline{AB}$ que forma un ángulo de 30° con respecto al diámetro como se muestra en la siguiente figura



Calcule el área de la región rayada.

Problema 33. En un bote se tienen 4 monedas de 50 centavos, 6 monedas de 1 peso, 8 monedas de a 2 pesos y 2 monedas de a 5 pesos. Suponiendo que una persona saca una moneda sin ver el contenido del bote, contestar las siguientes preguntas:

(a) ¿Qué probabilidad se tiene de sacar una moneda de 5 pesos? ¿Cuál de sacar una moneda de 50 centavos? ¿Cuál de sacar una moneda de a 2 pesos?

(b) ¿Cuál es la probabilidad de sacar una moneda de 1 peso o de 2 pesos?

(c) ¿Qué probabilidad hay de sacar una moneda de 50 centavos, 1 peso o 2 pesos?

Problema 34. Un depósito cónico tiene un volumen de 12 m^3 y una profundidad de 3 m. ¿Cuál es el radio de dicho depósito?

Dudas, comentarios, sugerencias, correcciones etc., sobre esta guía, contactar a:

Abelardo Santaella Quintas
fermat@esfm.ipn.mx, aquintas@esfm.ipn.mx

Notas y Elucubraciones

Notas y Elucubraciones

Notas y Elucubraciones

CONCURSO NACIONAL DE MATEMÁTICAS

PIERRE FERMAT

2007

GUÍA PARA NIVEL MEDIO SUPERIOR

Patrocinado por:

Sociedad Matemática Mexicana
Texas Instruments
Universidad Anáhuac
GlobalBook
COBI, Coorporación Bibliográfica, S. A. de C. V.
Instituto Politécnico nacional

1. Presentación

Uno de los objetivos fundamentales de la Escuela Superior de Física y Matemáticas del Instituto Politécnico Nacional, ha sido el de contribuir a la formación de profesionistas en Matemáticas a nivel de licenciatura y posgrado, con la finalidad de que puedan ser capaces de integrarse, al término de sus estudios, a áreas diversas como son la investigación, el desarrollo tecnológico y la docencia, entre otras. Todo esto motiva a la institución a organizar eventos y actividades conducentes a despertar en los estudiantes de los niveles de secundaria, medio superior y superior el gusto por las Matemáticas. Bajo este contexto, la Escuela Superior de Física y Matemáticas, se ha dado a la tarea de organizar el **Concurso Nacional de Matemáticas Pierre Fermat**, desde el año 1990.

2. Breve semblanza de Pierre Fermat

A principios de siglo XVII nace uno de los genios más singulares de la historia *M. Pierre de Fermat*, hijo de burgueses, el 17 de agosto de 1601 en Beaumont-de-Lomagne. Educado en Orléans y Tolouse estudia, en este último, la carrera de leyes y sus relaciones familiares le permitieron ocupar puestos como Consejero del Parlamento y Comisionario de la Chambre de Requêtes du Paris (1631) y de la Grande Chambre (1654), cuyos cargos le facilitaron disfrutar de ocio necesario para elaborar una obra que a más de cuatrocientos de su nacimiento hace de su nombre parte de nuestra cultura científica y que le han permitido conocerlo generalmente como el padre de la Teoría de Números Moderna. Gran parte de la inspiración de Fermat deriva de los trabajos de Diofanto, fue el primero en descubrir propiedades realmente profundas de los números enteros, contribuyó además en la construcción de la geometría analítica, diseñando técnicas que serían incorporadas al naciente cálculo infinitesimal. Con Pascal estableció las ideas básicas de la teoría de la probabilidad, propuso el principio óptico que lleva su nombre, diseño el método de demostración del descenso infinito,

mostró el potencial de las demostración por inducción; además, propuso lo que por casi cuatro siglos representó el sueño inalcanzable, y que permitió que gran parte de la Teoría de Números Algebraicos fuera desarrollada por los intentos de Kummer y sus contemporáneos para resolver el problema conocido como el *Último Teorema de Fermat*.

Para muchos de sus contemporáneos, Fermat fue un hombre de diversos matices. Descartes lo llamó fanfarrón, debido quizá a la imposibilidad del primer filósofo de la modernidad de descalificarlo en cuanto a su inteligencia y vastos conocimientos matemáticos. Marin Mersenne, con quien intercambio correspondencia, se refirió a él como el muy ilustrado hombre de Toulouse, mientras que Pascal, que poseía un gran intelecto y un talento inusual para el pensamiento matemático, lo calificó como el más grande matemático de Europa, lo cual pudo incomodar a Descartes. Wallis con quien sotuvo una polémica en cuanto a la importancia de sus resultados, se refería a él como ese máldito francés.

La fama de Fermat está fuertemente vinculada con una nota que hizo sobre el margen de un ejemplar de la *Arithmetica* de Diofanto. Este ejemplar con las anotaciones de Fermat se ha perdido y sólo se conoce de su existencia por la publicación de una edición de la *Arithmetica* por Samuel Fermat, su hijo. En está edición, el hijo transcribió la nota de su padre bajo los textos griego y latino de la pregunta 8 del libro 2 de Diofanto, la nota dice textualmente:

OBSERVATIO DOMINI PETRI DE FERMAT

Cubum autem in dous cubos, aut quadrato quadratum in duos quadrato quadratos, et generaliter nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duos eiusdem nominis fas est dividere: cuius rei demostrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caparet.

La traducción aproximada es:

OBSERVACIÓN DEL SEÑOR PIERRE DE FERMAT

Es imposible separar un cubo en dos cubos, o una cuarta potencia en dos cuartas potencias o, en general, cualquier potencia mayor que la segunda en dos potencias similares. He descubierto una demostración verdaderamente maravillosa de esto, pero este margen es demasiado pequeño y no cabe.

En notación matemática es: si $n \geq 3$ es un entero, entonces la ecuación $x^n + y^n = z^n$ no tiene soluciones enteras con $xyz \neq 0$.

En 1994 el matemático inglés Andrew Wiles, de la Universidad de Princeton, logró dar la demostración, utilizando argumentos que ciertamente no caben en el margen de cualquier libro.

3. Concurso Pierre Fermat 2007

El **Concurso Nacional de Matemáticas Pierre Fermat**, contempla tres categorías: *secundaria, media superior* y *superior.* Tal concurso se realizará en dos étapas: *eliminatoria* y *final.* La primera consiste de un examen de 25 a 30 preguntas de opción múltiple a resolverse en 3 horas. La étapa final consta de un examen escrito de 5 problemas de respuesta abierta (en cada nivel), con un tiempo de 4 horas para su solución.

4. Bases del concurso

Estar inscrito durante el ciclo escolar 2006-2007 en alguna institución pública o privada dentro del país, en el nivel escolar correspondiente. No se considera límite de edad, ni semestre ó año en el que se encuentre inscrito. Se deberá presentar comprobante de estudios vigente al momento de registrarse (credencial o constancia).

5. Premios

Diploma de participación para todos los concursantes y, a su vez, se premiará cada categoría, quedando a criterio del jurado la posibilidad de declarar desierta algún lugar de cada categoría. Tenemos además un

total de al menos once menciones honoríficas. Los ganadores de cada categoría obtendrán premios en efectivo, medallas, libros, y para los ganadores de nivel medio superior y superior habrá calculadoras.

6. Premiación

Se llevará a cabo el día 7 de diciembre del año 2007 a las 12 hrs., en el Auditorio *Dr. Víctor Flores Maldonado* de la Escuela Superior de Física y Matemáticas del Instituto Politécnico Nacional.

7. Inscripciones

La inscripción no tiene costo y se realizará del 18 de junio al 12 de octubre del 2007, en la sede donde se desee presentar el examen de la etapa eliminatoria (consultar www.esfm.ipn.mx/∼fermat).

8. Examen de la etapa eliminatoria

Para todos los niveles, el sábado 27 de octubre del 2007, de las 10 : 00 a las 13 : 00 hrs., en las sedes donde se inscribió.

9. Examen de la etapa final

Para todos los niveles, el sábado 24 de noviembre del 2007 de las 10 : 00 a las 14 : 00 hrs., en la Escuela Superior de Física y Matemáticas del IPN y sedes alternas.

10. Sedes

Escuela Superior de Física y Matemáticas del IPN.
Unidad Profesional *Adolfo López Mateos* del IPN, Edificio 9, Colonia Zacatenco, C.P. 07738, Depto. de Matemáticas, México, D. F.
Tel. 57 29 60 00 ext. 55011 y 55018
`Responsables:` Pablo Lam Estrada, Hugo Méndez Delgadillo.
`Modalidad:` Todos los niveles.

Colegio Panamericano Texcoco, Secundaria y Preparatoria S. C.

Carr. Molino de Flores, Calle Privada de Crisantemos # 3, Fracc. la Paz, Texcoco, Edo. de México.

Tel. (01 595) 95 51 385 ext. 104.

Responsable: Fís. Fernando Chávez León.

Modalidad: Secundaria y Medio Superior.

Escuela Preparatoria de Matehuala, Universidad Autónoma de San Luis Potosí.

Paseo Angel Veral s/n, Colonia Santa Martha, C.P. 78700. Matehuala San Luis Potosí.

Tel. 01 (488) 88 20106.

Responsable: Fís. Hugo Ariel Nava Sauceda.

Modalidad: Todos los niveles.

Sedes alternas: **Río Verde, San Luis Potosí y Cd. Valles.**

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.

Edificios 158 y 190 Ciudad Universitaria. Avenida San Claudio y Río Verde s/n, Col. Jardines de San Manuel, Puebla, Pue. C.P. 72570

Tel. (222) 2 29 55 00 ext. 7578.

Responsable: Dra. María Araceli Juárez Ramírez.

Modalidad: Todos los niveles.

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas de la Universidad Autónoma de Nuevo León.

Ciudad Universitaria s/n. Apartado Postal 101-F, San Nicolás de los Garza NL. C. P. 66450.

Tel (01 81) 83 29 40 30 ext. 6230

Responsable: Alfredo Alanís Durán.

Modalidad: Todos los niveles.

Facultad de Matemáticas, Universidad Veracruzana

Circuito Gonzalo Aguirre Beltrán s/n. Zona Universitaria, C. P. 91060.
Xalapa, Veracruz, México.
Tel (228) 8 42 17 45, Fax (228) 1 41 10 45
`Responsable:` Dr. Raquiel R. López Martínez.
`Modalidad:` Todos los niveles.

Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica de la Universidad Autónoma de Colima.

Km. 9 carretera Colima a Coquimatlan. Coquimatlan, Colima.
Tel/Fax (316) 316 11 65
`Responsable:` M. en I. Martín Eliseo Isaías Ramírez.
`Modalidad:` Todos los niveles.

Universidad Autónoma Benito Juárez de Oaxaca.

Ciudad Universitaria s/n. Av. Universidad. Exhacienda de los cinco señores Oaxaca, Oax. C. P. 68000. Tel (951) 516 37 10 y 11.
`Responsable:` José Luis Morales Cuevas.
`Modalidad:` Todos los niveles.
`Sedes alterna:` **Instituto de Ciencias de la Educación.**

Instituto Tecnológico Superior de Teziutlán

Fracción I y II, Aire Libre, La Mina, Teziutlán, Puebla. C. P. 73960
Tel (01 - 231) 31 - 14 000 ext. 118.
`Responsable:` Maestro Gustavo Urbano Juárez.
`Modalidad:` Medio Superior y Superior.

Universidad Autónoma de Aguascalientes

Departamento de Matemáticas y Física, edificio 26.
Av. Universidad no. 940, Ciudad Universitaria.
C.P. 20100 Aguascalientes, Ags.
`Responsable:` Prof. Roberto Ku Carrillo.
`Modalidad:` Medio Superior y Superior.

Universidad de Guadalajara

Avenida Revolución # 1500, edif. V, Guadalajara Jalisco.

C. P. 44420

Tel (01-33) 36199552

`Responsables:` María Eugenia Guzmán Flores, Juan Martín Casillas.

`Modalidad:` Todos los niveles.

Universidad Valle de Grijalva.

Escuela de Ciencias de la Educación, Campus Centro, Cerrada Bugambilia # 137, Fracc. Bugambilia, C.P. 29020, Tuxtla Gutierrez, Chiapas.

Tel. 01 961 61 52840 ext. 194.

`Responsable:` M. en C. Fernando Alfonso Jiménez Méndez.

`Modalidad:` Todos los niveles.

Grupo Educativo Instituto San Carlos.

Vía Morelos No. 182, Colonia Nuevo Laredo.

Ecatepec, Estado de México.

Tel. 57 70 08 24

`Responsable:` Lic. Guillermina Ávila García..

`Modalidad:` Nivel secundaria.

Información de sedes, guías, cartel y avances del concurso en:

www.esfm.ipn.mx/~fermat

Dudas y comentarios en:

fermat@esfm.ipn.mx

COMITÉ ORGANIZADOR

Adolfo Escamilla Esquivel

Director ESFM–IPN

Francisco Ramírez Reyes

Jefa del Departamento de Matemáticas ESFM–IPN

Abelardo Santaella Quintas

Coordinador General

Pablo Lam Estrada

Hugo Méndez Delgadillo

Adrián Alcántar Torres

Salvador Quintín Flores García

Rubén S. Mancio Toledo

Coordinadores

Abelardo Santaella Quintas

Pablo Lam Estrada

Hugo Méndez Delgadillo

Elaboración y Revisión de Guías

Heriberto Casarrubias Vargas

Jorge Jair Herrera Flores

Apoyo Técnico

11. Ganadores del Concurso Pierre Fermat 2006

Superior	
Primer lugar	**David José Fernández Bretón** Escuela Superior de Física y Matemáticas del Instituto Politécnico Nacional
Segundo lugar	**Cristos Alberto Ruiz Toscano** Facultad de Matemáticas Universidad de Guanajuato
Tercer lugar	**José Hernández Santiago** Universidad Tecnológica de la Mixteca

Media superior	
Primer lugar	**Fernando Campos García** Escuela Nacional Preparatoria Plantel 5 José Vasconcelos, UNAM
Segundo lugar	**Valente Ramírez García Luna** Instituto Tecnológico de Estudios Superiores Monterrey, Campus San Luis Potosí
Tercer lugar	**Marlors Emilio Espinosa Lara** Escuela Preparatoria No. 7 Universidad de Guadalajara

Secundaria	
Primer lugar	**Arturo Sánchez González** TEC 25 (sede BUAP)
Segundo lugar	**Abraham Jiménez Pacheco** DGB 2 (sede BUAP)
Tercer lugar	**Isamar Ortíz Hernández** Instituto Minerva, Perote Veracruz

12. Menciones Honoríficas del Concurso Pierre Fermat 2006

Superior	
Jonathan Toledo Toledo	Escuela Superior de Física y Matemáticas del Instituto Politécnico Nacional
Marco Antonio Figueroa Ibarra	Facultad de Matemáticas Universidad de Guanajuato
Alexandre Ramos Peón	Facultad de Matemáticas Universidad de Guanajuato
Oscar Montiel González	Facultad de Ciencias Físico Matemáticas Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Medio superior	
Manuel Alejandro Bustos Manriquez	Bachillerato Técnico No. 4 FIME de la Universidad de Colima
Manuel Alejandro Abad Najar	Bachillerato Técnico No. 4 FIME de la Universidad de Colima
Ariel Chávez González	Minatitlán, Veracruz Universidad Valle de Grijalva
Lourdes Cruz González	Cecyt No. 9 Juan de Dios Bátiz del Instituto Politécnico Nacional
Jorge Michell Nuñez Reyna	Colegio de Bachilleres No. 25 del Estado de San Luis Potosí

Secundaria	
Erika Beatriz Ugalde Olivarez	Institución Educativa Héroes de la Libertad, A. C.

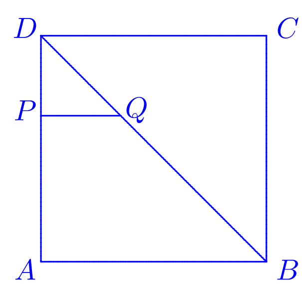
CONCURSO PIERRE FERMAT 2007, GUÍA PARA NIVEL MEDIO SUPERIOR

ESCUELA SUPERIOR DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS DEL I.P.N.

Problema 1. La diferencia entre el perímetro y el área de un cuadrado expresado en unidades convenientes es 12, siendo el área el número menor. Hallar la longitud del lado del cuadrado.

Problema 2. Una sala tiene tres metros más de larga que de ancha. Si su longitud fuera tres metros mayor de lo que es y la anchura fuera de dos metros menos, la superficie del piso sería la misma. Hallar las dimensiones de la sala.

Problema 3. En el cuadrado, PQ es paralelo a AB. Si $AB = 10$ cm, $DB = 10\sqrt{2}$ cm y $DP = 3$ cm, ¿ cuál es la longitud de DQ ?



Problema 4. Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $\dfrac{a^{x+1}}{b^{x-1}} = c^{2x}$.

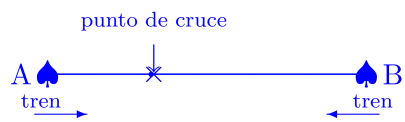
b) Si $\log(x^2y^3) = a$, y $\log\dfrac{x}{y} = b$, hallar $\log x$ y $\log y$.

c) Si $a^{3-x}b^{5x} = a^{x+5}$, demostrar que $x\log\left(\dfrac{b}{a}\right) = \log a$.

d) $(a^4 - 2a^2b^2 + b^4)^{x-1} = (a-b)^{2x}(a+b)^{-2}$.

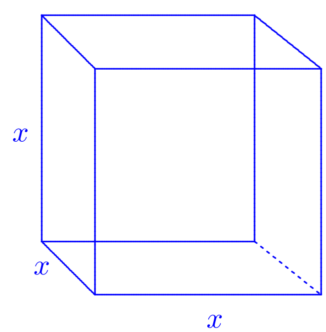
Problema 5. Un depósito se puede llenar en $33\frac{1}{3}$ minutos con dos fuentes al mismo tiempo. La menor de las fuentes aisladamente tarda 15 minutos más que la mayor en llenar el depósito. ¿ Cuánto tiempo tardaría cada una de las fuentes en llenar el depósito ?

Problema 6. Considere las ciudades A y B separadas por 300 kilómetros. Dos trenes parten al mismo tiempo de cada una de las dos estaciones de A y B en direcciones hacia B y A respectivamente.



Después de haberse cruzado, el tren que salio de A tarda 9 horas en llegar a B y el tren de B, cuatro horas en llegar a A. Hallar la velocidad de cada uno de los trenes.

Problema 7. La suma del volumen de un cubo y el perímetro de una de sus caras, menos el área total del cubo, es igual a la longitud de una arista más 18. Hallar la arista del cubo.

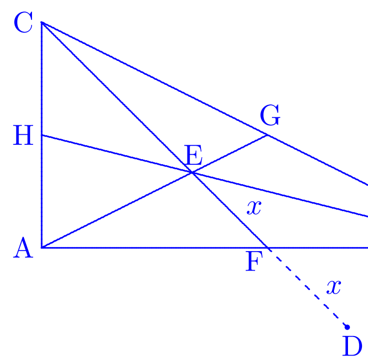


Problema 8. Sea $A = (x-1)^4 + 4(x-1)^3 + 6(x-1)^2 + 4(x-1) + 1$, entonces A es igual a:

a) $(x-1)^2$ b) x^4 c) $(x+1)^4$ d) x^4+1

Problema 9. ¿ Cuál es el último dígito de 2137^{753} ?

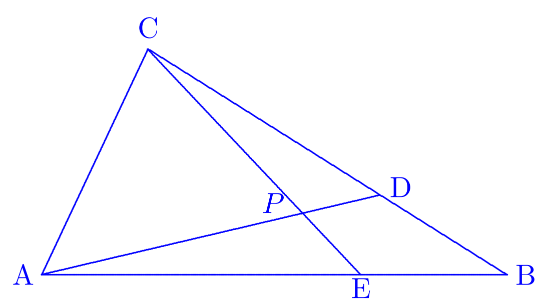
Problema 10. Las medianas AG y BH de un triángulo con lados desiguales, tienen longitudes de 3 y 6 cm respectivamente, el área del triángulo es $3\sqrt{5}$ cm^2. ¿ Cuál es la longitud de la tercer mediana ? La siguiente figura contiene una sugerencia para la solución.



Problema 11. Considere el triángulo isósceles ABC con base AC. Los puntos P y Q se localizan en CB y AB respectivamente, se satisface además que $AC = AP = PQ = QB$. ¿ Cuál es la medida en grados del ángulo B ?

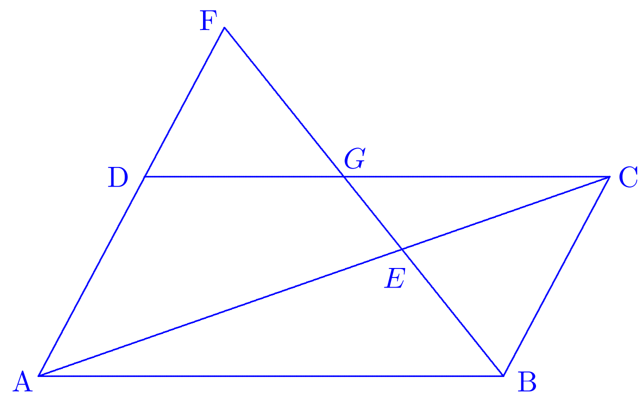
Problema 12. Un polígono regular de n lados está inscrito en un círculo de radio r. El área del polígono es $3r^2$. ¿ Cuál es el número de lados del polígono ?

Problema 13. Considere la siguiente figura del triángulo ABC,



donde se satisface que $\dfrac{CD}{DB} = \dfrac{3}{1}$ y $\dfrac{AE}{EB} = \dfrac{3}{2}$. Sea $r = \dfrac{CP}{PE}$, donde P es el punto de intersección de CE y AD. Calcule r.

Problema 14. Considere la siguiente figura,



donde $ABCD$ es un paralelogramo, F es un punto localizado en la prolongación del lado AD de paralelogramo y BF intersecta a la diagonal AC en el punto E. Si $EF = 32$ y $GF = 24$, hallar BE.

Problema 15. Si x e y son ambos enteros, ¿ tiene solución la ecuación $(x-8)(x-10) = 2^y$? Es caso afirmativo, hallar las soluciones.

Problema 16. Emplea una rotación de ejes, para eliminar el término xy en cada una de las ecuaciones siguientes:

a) $4x^2 - 12xy + 9y^2 - 8\sqrt{13}x - 14\sqrt{13}y + 117 = 0$

b) $4x^2 + 16xy - 8y^2 + 4\sqrt{5}x + 8\sqrt{5}y - 1 = 0$

¿ Qué cónica representa cada ecuación ?

Problema 17. Las raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ son p y q. La ecuación cuyas raíces son $ap + b$ y $aq + b$ es:

a) $x^2 - bx - ac = 0$

b) $x^2 + 3bx + ca + 2b^2 = 0$

d) $x^2 - bx + ac = 0$

e) $x^2 + 3bx - ca + 2b^2 = 0$

c) $x^2 + b(2-a)x + a^2c + b^2(a+1) = 0$

Problema 18. ¿ Cuál es el número de términos que hay en la expresión $(x + y + z + w + v)^{11}$?

Problema 19. Sin aplicar cálculo diferencial, halle el valor mínimo de la expresión $\sqrt{x^2+y^2}$ si $5x+12y=0$.

Problema 20. Proporcione un argumento combinatorio para mostrar que si n y k son enteros positivos con $n=3k$, entonces $\dfrac{n!}{(3!)^k}$ es un entero.

Problema 21. Si $x_{k+1}=x_k+\dfrac{1}{2}$ para $k=1,2,\ldots,n-1$ y $x_1=1$, calcular $x_1+x_2+\cdots+x_n$.

Problema 22. Hallar la solución para cada uno de sistemas

a) $\begin{aligned} x^2-xy+y^2&=3\\ x^2+2xy-y^2&=1\end{aligned}$

b) $\begin{aligned} x^2+xy+y^2&=7\\ x^2-xy-y^2&=11\end{aligned}$

c) $\begin{aligned} x^2+y^2-x-y&=2\\ xy+x+y&=5\end{aligned}$

c) $\begin{aligned} x^2+y^2-2x-2y&=14\\ xy+x+y+5&=0\end{aligned}$

y comprobar los resultados gráficamente.

Problema 23. El número de soluciones de la ecuación $2^{2x}-3^{2y}=55$, donde x e y son enteros es:

a) cero

b) una

c) dos

d) tres

e) más de tres, pero finito

f) una infinidad

Problema 24. Si x es número que satisface la ecuación

$$\sqrt[3]{x+9}-\sqrt[3]{x-9}=3,$$

entonces x^2 está entre:

a) 55 y 65 b) 65 y 75 c) 75 y 85

Problema 25. Las apuestas en contra de que A resuelva un cierto problema son 4 a 3, y las apuestas en favor de B para resolver el mismo problema son 7 a 5. ¿ Cuál es la probabilidad de que el problema quede resuelto si ambos tratan de resolverlo ?

Problema 26. ¿ Cuántos cuadrados en total existen en un tablero de ajedrez y en general en un tablero de $n \times n$?

Problema 27. Racionalizar los denominadores de las siguientes fracciones:

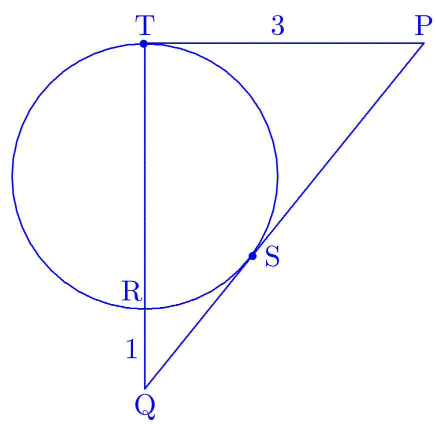
a) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

b) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}$

c) $\dfrac{\sqrt{10}+\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{10}-\sqrt{5}}$

d) $\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{a+b}}$

Problema 28. En la figura, la tangente TP tiene una longitud de 3 centímetros. El diametro TR se extiende 1 cm hacia el punto Q. La tangente QS se extiende y llega hasta el punto P. Calcula el radio del círculo.



Problema 29. En álgebra elemental se da la regla para hallar las raíz cuadrada de una expresión binomial de radicales cuadráticos. Podemos a veces extraer la raíz cuadrada de una expresión que contenga más de dos radicales cuadráticos, tal como $a+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}$.

Supongamos que

$$\sqrt{a+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}} = \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z};$$

entonces,

$$a+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d} = x+y+z+2\sqrt{xy}+2\sqrt{xz}+2\sqrt{yz};$$

si hacemos ahora

$$2\sqrt{xy} = \sqrt{b},\ 2\sqrt{xz} = \sqrt{c},\ 2\sqrt{yz} = \sqrt{d},$$

y si, al mismo tiempo, los valores de x, y, z así encontradas satisfacen la ecuación $x+y+z = a$, entonces habremos encontrado la raíz requerida.

Aplicar el porcedimiento anterior para obtener la raíz cuadrada de cada una de las siguientes expresiones:

a) $16 - 2\sqrt{20} - 2\sqrt{28} + 2\sqrt{35}$.
c) $24 + 4\sqrt{15} - 4\sqrt{21} - 2\sqrt{35}$.
b) $6 + \sqrt{12} - \sqrt{24} - \sqrt{8}$.
a) $5 - \sqrt{10} - \sqrt{15} + \sqrt{6}$.

Problema 30. Los primeros problemas sobre decantar líquido de un vaso a otros fueron propuestos por Niccola Fontana, conocido como Tartaglia ($1500 - 1559$). Uno de sus problemas consistía en dividir 24 onzas de un bálsamo en tres partes iguales, teniendo únicamente frascos con capacidad para $5, 11, 13$ onzas respectivamente.

Para resolver este tipo de problemas no es válido aproximar o medir ni marcar un resultado de medición, sino sólo proceden los trasvases de un recipiente a otro. Se trata además de resolver este tipo de problemas en el menor número de movimientos posibles. Por otra parte, si existen varias soluciones, optimizar, es decir, en este caso encontrar la solución en la que el total del líquido trasvasado sea mínimo.

Resolver los siguientes problemas:

a) Dos amigos poseen una jarra de vino de ocho litros, y desean repartírsela equitativamente. Para la operación disponen de dos vasos vacíos, uno con capacidad de cinco litros y otro con capacidad de tres. ¿ Cuál sería la solución óptima ?
b) Considere el problema anterior pero para una barril de vino de 12 litros y poseen 2 barriles vacíos uno de 7 y otro de 5 litros respectivamente. El rompecabezas particular consiste en dividir el vino en dos partes iguales de seis litros cada una, y en general en descubrir un procedimiento que permita dados un barril lleno con capacidad $4n$ y dos barriles vacíos con capacidad

$2n+1$ y $2n-1$, descubrir las operaciones que se deben seguir para trasvasar el contenido del barril lleno, de tal forma que se pueda dividir en dos partes iguales con capacidad de $2n$ cada una.

¿ Podríamos encontrar un procedimiento que proporcione la solución óptima sea cual fuere el valor de n ?

c) Dos aviadores que aterrizaron en un desierto desean dividir el contenido de una jarra de nueve litros de cerveza en tres partes iguales, contando con tarros de cinco, cuatro y dos litros. ¿ Cuál es la secuencia óptima de trasvases que deben seguirse para obtener el menor número posible de movimientos ?

d) **El problema original de Tartaglia.** Tartaglia fue uno de los grandes matemáticos de su siglo. Su sobrenombre significa “el tartamudo”. Explicó su ciencia favorita en Verona, Vicenza, Brescia y Venecia. Se encontraba en esta última ciudad cuando en 1535 del Fiore le propuso una especie de duelo científico que él aceptó y en el cual resolvió todas las cuestiones que le presentó su contrincante. Fue uno de los primeros que logró resolver las ecuaciones de tercer grado y aplicar las matemáticas a la artillería.

El primer rompecabezas impreso relacionado con trasvases de líquido de un vaso a otros fue propuesto por Tartaglia en su obra *Questi et invenzioni diverse*. He aquí su versión: Dividir el contenido de una jarra de 24 litros en partes iguales, contando solamente con jarras de capacidades $5, 11, 13$ litros respectivamente. Encontremos una solución óptima.

Problema 31. De una baraja de 52 cartas se sacan dos al azar. Hallar la probabilidad de que una de ellas sea una sota y la otra un rey.

Problema 32. Comparar las probabilidades de obtener un 4 con un dado, 8 con dos dados y 12 con tres dados.

Problema 33. Debe ocurrir uno de dos acontecimientos: si la probabilidad de que uno es dos tercios de la del otro, hállese cómo se puntuarían las apuestas en favor del otro.

Problema 34. Si se multiplican 4 números enteros tomados al azar, demostrar que la probabilidad de que el último dígito del producto sea $1, 3, 7$ ó 9 es $\frac{16}{625}$.

Problema 35. Las puntuaciones para que un libro sea favorablemente calificado por tres críticos independientes son 5 a 2, 4 a 3, 3 a 4, respectivamente. ¿ Cuál es la probabilidad para que de las tres críticas una mayoría sea favorable ?

Problema 36. Hay 4 monedas rojas y 3 monedas azules colocadas al azar en línea recta. Demostrar que la probabilidad de que las monedas extremas sean ambas azules es $\frac{1}{7}$. Generalizar este resultado en el caso de m monedas rojas y n monedas azules.

Problema 37. Cuatro personas sacan una carta cada una de una baraja ordinaria. Hallar la probabilidad:

a) de que cada carta sea de cada palo;
b) de que no haya dos cartas del mismo valor.

Problema 38. Un asunto fue sometido a votación de 600 personas y se perdió; habiedo votado de nuevo las mismas personas sobre el mismo asunto, fue ganado el caso por el doble de votos por el que había sido perdido, y la nueva mayoría fue con respecto a la anterior como 8 a 7. ¿ Cuántas personas cambiarón de opinión ?

Problema 39. Un tren, una hora después de partir sufre un accidente que lo detiene una hora, después de la cual prosigue su camino a tres quintos de su velocidad anterior y llega a su destino tres horas después de tiempo; pero si el accidente hubiera ocurrido 50 kilometros más adelante, habría llegado solamente con hora y media de retraso. Hallar la longitud del recorrido.

Problema 40. Si $\sqrt{a-x}+\sqrt{b-x}+\sqrt{c-x}=0$, demostrar que

$$(a+b+c+3x)(a+b+c-x)=4(bc+ca+ab);$$

y si $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}=0$, demostrar que $(a+b+c)^3=27abc$.

Problema 41. Hallar dos números tales que su suma multiplicada por la suma de sus cuadrados sea 5500, y su diferencia multiplicada por la diferencia de sus cuadrados sea 352.

Problema 42. Si $x=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{2ab}{a^2-b^2}}$, demuestre que

$$\frac{ab}{a^2+b^2}\left(x^{\frac{a}{b}}+x^{\frac{b}{a}}\right)=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}}.$$

Problema 43. Resolver la ecuación

$$\frac{x-a}{b}+\frac{x-b}{a}=\frac{b}{x-a}+\frac{a}{x-b}.$$

Problema 44. Si $a>b$, demostrar que $a^a b^b > a^b b^a$ y

$$\ln\frac{b}{a}<\ln\frac{1+b}{1+a}.$$

Problema 45. Demostrar que

a) $(x+y+z)^3>27(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)$,

b) $xyz>(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)$.

Problema 46. Aplicando determinantes, resolver los siguientes sistemas de ecuaciones

a) $$\begin{aligned} x\cos\alpha - y\operatorname{sen}\alpha &= \cos\beta \\ x\operatorname{sen}\alpha + y\cos\beta &= \operatorname{sen}\beta \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} x\tan\alpha + y &= \operatorname{sen}(\alpha+\beta) \\ x - y\tan\alpha &= \cos(\alpha+\beta) \end{aligned}$$

donde $\alpha \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$ (k es un número entero).

Problema 47. Los gastos de una excursión de 43 personas fueron \$229.00; si los hombres pagarón 10 pesos cada uno, las damas 5 pesos y los niños 2 pesos, ¿ cuántos fueron de cada clase ?

Problema 48. Hallar los límites de las siguientes expresiones

a) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{a^x - b^x}{x}$

b) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\ln(1+x)}$

c) $\displaystyle \lim_{x\to a} \frac{e^{mx} - e^{ma}}{x-a}$

d) $\displaystyle \lim_{x\to 2a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2a} + \sqrt{x-2a}}{\sqrt{x^2-4a^2}}$

e) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2+x^4)}{3x^2(1-2x)}$

f) $\displaystyle \lim_{x\to 1} \frac{1-x+\ln x}{1-\sqrt{2x-x^2}}$

g) $\displaystyle \lim_{x\to a} \frac{(a^2-x^2)^{1/2} + (a-x)^{3/2}}{(a^3-x^3)^{1/2} + (a-x)^{1/2}}$

h) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^n - \frac{n+1}{n}\right]^{-n}$

i) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} n \ln \frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1}}$

j) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \sqrt[x]{\frac{a+x}{a-x}}$

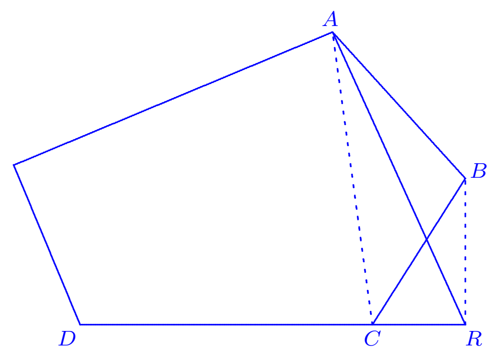
Problema 49. Calcular los siguientes determinantes

a) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha\cos\beta & \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha\cos\beta & \cos\alpha\operatorname{sen}\beta \\ 0 & -\operatorname{sen}\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 1 \\ \operatorname{sen}\beta & \cos\beta & 1 \\ \operatorname{sen}\gamma & \operatorname{sen}\gamma & 1 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} a+x & x & x \\ x & b+x & x \\ x & x & c+x \end{vmatrix}$

Problema 50. La teoría pitagórica para transformar un área de una forma rectilínea a otra forma rectilínea es importante en el álgebra geométrica griega. La solución pitágorica del problema básico de construir un cuadrado de igual área que un polígono dado puede encontrarse en las porposiciones $42, 44, 45$ del libro I y la proposición 14 del libro II de los Elementos de Euclides. Una solución más simple, probablemente conocida también por los pitágoricos, es la siguiente: Considere un polígono cualquiera $ABCD\cdots$ con un vértice B saliente, consideremos la siguiente figura



Trace BR paralela a AC que corte a DC en R. Entonces, como los triángulos ABC y ARC tienen una base común AC y alturas iguales sobre su base común, estos triágulos tienen áreas iguales. Se deduce que los polígonos $ABCD\cdots$ y $ARD\cdots$ tienen áreas iguales. Pero el polígono derivado tiene un lado menos que el polígono dado. Por una repetición de este procedimiento finalmente obtenemos un triángulo que tiene la misma área que el polígono dado. Ahora bien, si b es un lado del triángulo y h la áltura correspondiente a b, el lado de un cuadrado equivalente está dado por $\sqrt{\frac{bh}{2}}$, esto es la media proporcional entre b y $\frac{h}{2}$. Como esta media proporcional se construye fácilmente con regla y compás, todo el problema puede llevarse al cabo con estas herramientas.

Muchos problemas interesantes sobre áreas pueden resolverse por el procedimiento simple anterior de trazar rectas paralelas.

a) Trace un hexágono irregular y luego constrúyase, con regla y compás, un cuadrado que tenga la misma área.
b) Con regla y compás divídase un cuadrilátero $ABCD$ en tres partes equivalente por rectas trazadas de modo que pasen por el vérice A.
c) Biséctese un trapecio por una recta trazada desde un punto P de la base menor.
d) Transfórmese el triángulo ABC de modo que el ángulo A no se altere, pero el lado opuesto al ángulo A sea paralelo a la recta dada MN.
e) Transfórmese un triángulo dado en uno isóceles, dado el ángulo del vértice.

Dudas, comentarios, sugerencias, correcciones etc., sobre esta guía, contactar a:

Abelardo Santaella Quintas
`fermat@esfm.ipn.mx`, `aquintas@esfm.ipn.mx`

Notas y Elucubraciones

Notas y Elucubraciones

CONCURSO NACIONAL DE MATEMÁTICAS

PIERRE FERMAT

2007

GUÍA PARA NIVEL SUPERIOR

Patrocinado por:

Sociedad Matemática Mexicana
Texas Instruments
Universidad Anáhuac
GlobalBook
COBI, Coorporación Bibliográfica, S. A. de C. V.
Instituto Politécnico nacional

1. Presentación

Uno de los objetivos fundamentales de la Escuela Superior de Física y Matemáticas del Instituto Politécnico Nacional, ha sido el de contribuir a la formación de profesionistas en Matemáticas a nivel de licenciatura y posgrado, con la finalidad de que puedan ser capaces de integrarse, al término de sus estudios, a áreas diversas como son la investigación, el desarrollo tecnológico y la docencia, entre otras. Todo esto motiva a la institución a organizar eventos y actividades conducentes a despertar en los estudiantes de los niveles de secundaria, medio superior y superior el gusto por las Matemáticas. Bajo este contexto, la Escuela Superior de Física y Matemáticas, se ha dado a la tarea de organizar el **Concurso Nacional de Matemáticas Pierre Fermat**, desde el año 1990.

2. Breve semblanza de Pierre Fermat

A principios de siglo XVII nace uno de los genios más singulares de la historia *M. Pierre de Fermat*, hijo de burgueses, el 17 de agosto de 1601 en Beaumont-de-Lomagne. Educado en Orléans y Tolouse estudia, en este último, la carrera de leyes y sus relaciones familiares le permitieron ocupar puestos como Consejero del Parlamento y Comisionario de la Chambre de Requêtes du Paris (1631) y de la Grande Chambre (1654), cuyos cargos le facilitaron disfrutar de ocio necesario para elaborar una obra que a más de cuatrocientos de su nacimiento hace de su nombre parte de nuestra cultura científica y que le han permitido conocerlo generalmente como el padre de la Teoría de Números Moderna. Gran parte de la inspiración de Fermat deriva de los trabajos de Diofanto, fue el primero en descubrir propiedades realmente profundas de los números enteros, contribuyó además en la construcción de la geometría analítica, diseñando técnicas que serían incorporadas al naciente cálculo infinitesimal. Con Pascal estableció las ideas básicas de la teoría de la probabilidad, propuso el principio óptico que lleva su nombre, diseño el método de demostración del descenso infinito,

mostró el potencial de las demostración por inducción; además, propuso lo que por casi cuatro siglos representó el sueño inalcanzable, y que permitió que gran parte de la Teoría de Números Algebraicos fuera desarrollada por los intentos de Kummer y sus contemporáneos para resolver el problema conocido como el *Último Teorema de Fermat*.

Para muchos de sus contemporáneos, Fermat fue un hombre de diversos matices. Descartes lo llamó fanfarrón, debido quizá a la imposibilidad del primer filósofo de la modernidad de descalificarlo en cuanto a su inteligencia y vastos conocimientos matemáticos. Marin Mersenne, con quien intercambio correspondencia, se refirió a él como el muy ilustrado hombre de Toulouse, mientras que Pascal, que poseía un gran intelecto y un talento inusual para el pensamiento matemático, lo calificó como el más grande matemático de Europa, lo cual pudo incomodar a Descartes. Wallis con quien sotuvo una polémica en cuanto a la importancia de sus resultados, se refería a él como ese máldito francés.

La fama de Fermat está fuertemente vinculada con una nota que hizo sobre el margen de un ejemplar de la *Arithmetica* de Diofanto. Este ejemplar con las anotaciones de Fermat se ha perdido y sólo se conoce de su existencia por la publicación de una edición de la *Arithmetica* por Samuel Fermat, su hijo. En está edición, el hijo transcribió la nota de su padre bajo los textos griego y latino de la pregunta 8 del libro 2 de Diofanto, la nota dice textualmente:

Observatio Domini Petri De Fermat

Cubum autem in dous cubos, aut quadrato quadratum in duos quadrato quadratos, et generaliter nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duos eiusdem nominis fas est dividere: cuius rei demostrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caparet.

La traducción aproximada es:

Observación del Señor Pierre De Fermat

Es imposible separar un cubo en dos cubos, o una cuarta potencia en dos cuartas potencias o, en general, cualquier potencia mayor que la segunda en dos potencias similares. He descubierto una demostración verdaderamente maravillosa de esto, pero este margen es demasiado pequeño y no cabe.

En notación matemática es: si $n \geq 3$ es un entero, entonces la ecuación $x^n + y^n = z^n$ no tiene soluciones enteras con $xyz \neq 0$.

En 1994 el matemático inglés Andrew Wiles, de la Universidad de Princeton, logró dar la demostración, utilizando argumentos que ciertamente no caben en el margen de cualquier libro.

3. Concurso Pierre Fermat 2007

El **Concurso Nacional de Matemáticas Pierre Fermat**, contempla tres categorías: *secundaria, media superior* y *superior.* Tal concurso se realizará en dos étapas: *eliminatoria* y *final.* La primera consiste de un examen de 25 a 30 preguntas de opción múltiple a resolverse en 3 horas. La étapa final consta de un examen escrito de 5 problemas de respuesta abierta (en cada nivel), con un tiempo de 4 horas para su solución.

4. Bases del concurso

Estar inscrito durante el ciclo escolar 2006-2007 en alguna institución pública o privada dentro del país, en el nivel escolar correspondiente. No se considera límite de edad, ni semestre ó año en el que se encuentre inscrito. Se deberá presentar comprobante de estudios vigente al momento de registrarse (credencial o constancia).

5. Premios

Diploma de participación para todos los concursantes y, a su vez, se premiará cada categoría, quedando a criterio del jurado la posibilidad de declarar desierta algún lugar de cada categoría. Tenemos además un

total de al menos once menciones honoríficas. Los ganadores de cada categoría obtendrán premios en efectivo, medallas, libros, y para los ganadores de nivel medio superior y superior habrá calculadoras.

6. Premiación

Se llevará a cabo el día 7 de diciembre del año 2007 a las 12 hrs., en el Auditorio *Dr. Víctor Flores Maldonado* de la Escuela Superior de Física y Matemáticas del Instituto Politécnico Nacional.

7. Inscripciones

La inscripción no tiene costo y se realizará del 18 de junio al 12 de octubre del 2007, en la sede donde se desee presentar el examen de la etapa eliminatoria (consultar www.esfm.ipn.mx/∼fermat).

8. Examen de la etapa eliminatoria

Para todos los niveles, el sábado 27 de octubre del 2007, de las 10 : 00 a las 13 : 00 hrs., en las sedes donde se inscribió.

9. Examen de la etapa final

Para todos los niveles, el sábado 24 de noviembre del 2007 de las 10 : 00 a las 14 : 00 hrs., en la Escuela Superior de Física y Matemáticas del IPN y sedes alternas.

10. Sedes

Escuela Superior de Física y Matemáticas del IPN.
Unidad Profesional *Adolfo López Mateos* del IPN, Edificio 9, Colonia Zacatenco, C.P. 07738, Depto. de Matemáticas, México, D. F.
Tel. 57 29 60 00 ext. 55011 y 55018
`Responsables:` Pablo Lam Estrada, Hugo Méndez Delgadillo.
`Modalidad:` Todos los niveles.

Colegio Panamericano Texcoco, Secundaria y Preparatoria S. C.

Carr. Molino de Flores, Calle Privada de Crisantemos # 3, Fracc. la Paz, Texcoco, Edo. de México.

Tel. (01 595) 95 51 385 ext. 104.

Responsable: Fís. Fernando Chávez León.

Modalidad: Secundaria y Medio Superior.

Escuela Preparatoria de Matehuala, Universidad Autónoma de San Luis Potosí.

Paseo Angel Veral s/n, Colonia Santa Martha, C.P. 78700. Matehuala San Luis Potosí.

Tel. 01 (488) 88 20106.

Responsable: Fís. Hugo Ariel Nava Sauceda.

Modalidad: Todos los niveles.

Sedes alternas: **Río Verde, San Luis Potosí y Cd. Valles.**

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.

Edificios 158 y 190 Ciudad Universitaria. Avenida San Claudio y Río Verde s/n, Col. Jardines de San Manuel, Puebla, Pue. C.P. 72570

Tel. (222) 2 29 55 00 ext. 7578.

Responsable: Dra. María Araceli Juárez Ramírez.

Modalidad: Todos los niveles.

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas de la Universidad Autónoma de Nuevo León.

Ciudad Universitaria s/n. Apartado Postal 101-F, San Nicolás de los Garza NL. C. P. 66450.

Tel (01 81) 83 29 40 30 ext. 6230

Responsable: Alfredo Alanís Durán.

Modalidad: Todos los niveles.

Facultad de Matemáticas, Universidad Veracruzana
Circuito Gonzalo Aguirre Beltrán s/n. Zona Universitaria, C. P. 91060.
Xalapa, Veracruz, México.
Tel (228) 8 42 17 45, Fax (228) 1 41 10 45
`Responsable:` Dr. Raquiel R. López Martínez.
`Modalidad:` Todos los niveles.

Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica de la Universidad Autónoma de Colima.
Km. 9 carretera Colima a Coquimatlan. Coquimatlan, Colima.
Tel/Fax (316) 316 11 65
`Responsable:` M. en I. Martín Eliseo Isaías Ramírez.
`Modalidad:` Todos los niveles.

Universidad Autónoma Benito Juárez de Oaxaca.
Ciudad Universitaria s/n. Av. Universidad. Exhacienda de los cinco señores Oaxaca, Oax. C. P. 68000. Tel (951) 516 37 10 y 11.
`Responsable:` José Luis Morales Cuevas.
`Modalidad:` Todos los niveles.
`Sedes alterna:` **Instituto de Ciencias de la Educación.**

Instituto Tecnológico Superior de Teziutlán
Fracción I y II, Aire Libre, La Mina, Teziutlán, Puebla. C. P. 73960
Tel (01 - 231) 31 - 14 000 ext. 118.
`Responsable:` Maestro Gustavo Urbano Juárez.
`Modalidad:` Medio Superior y Superior.

Universidad Autónoma de Aguascalientes
Departamento de Matemáticas y Física, edificio 26.
Av. Universidad no. 940, Ciudad Universitaria.
C.P. 20100 Aguascalientes, Ags.
`Responsable:` Prof. Roberto Ku Carrillo.
`Modalidad:` Medio Superior y Superior.

Universidad de Guadalajara

Avenida Revolución # 1500, edif. V, Guadalajara Jalisco.

C. P. 44420

Tel (01-33) 36199552

`Responsables:` María Eugenia Guzmán Flores, Juan Martín Casillas.

`Modalidad:` Todos los niveles.

Universidad Valle de Grijalva.

Escuela de Ciencias de la Educación, Campus Centro, Cerrada Bugambilia # 137, Fracc. Bugambilia, C.P. 29020, Tuxtla Gutierrez, Chiapas.

Tel. 01 961 61 52840 ext. 194.

`Responsable:` M. en C. Fernando Alfonso Jiménez Méndez.

`Modalidad:` Todos los niveles.

Grupo Educativo Instituto San Carlos.

Vía Morelos No. 182, Colonia Nuevo Laredo.

Ecatepec, Estado de México.

Tel. 57 70 08 24

`Responsable:` Lic. Guillermina Ávila García..

`Modalidad:` Nivel secundaria.

Información de sedes, guías, cartel y avances del concurso en:

www.esfm.ipn.mx/~fermat

Dudas y comentarios en:

fermat@esfm.ipn.mx

COMITÉ ORGANIZADOR

Adolfo Escamilla Esquivel

Director ESFM–IPN

Francisco Ramírez Reyes

Jefa del Departamento de Matemáticas ESFM–IPN

Abelardo Santaella Quintas

Coordinador General

Pablo Lam Estrada

Hugo Méndez Delgadillo

Adrián Alcántar Torres

Salvador Quintín Flores García

Rubén S. Mancio Toledo

Coordinadores

Abelardo Santaella Quintas

Pablo Lam Estrada

Hugo Méndez Delgadillo

Elaboración y Revisión de Guías

Heriberto Casarrubias Vargas

Jorge Jair Herrera Flores

Apoyo Técnico

11. Ganadores del Concurso Pierre Fermat 2006

Superior	
Primer lugar	**David José Fernández Bretón** Escuela Superior de Física y Matemáticas del Instituto Politécnico Nacional
Segundo lugar	**Cristos Alberto Ruiz Toscano** Facultad de Matemáticas Universidad de Guanajuato
Tercer lugar	**José Hernández Santiago** Universidad Tecnológica de la Mixteca

Media superior	
Primer lugar	**Fernando Campos García** Escuela Nacional Preparatoria Plantel 5 José Vasconcelos, UNAM
Segundo lugar	**Valente Ramírez García Luna** Instituto Tecnológico de Estudios Superiores Monterrey, Campus San Luis Potosí
Tercer lugar	**Marlors Emilio Espinosa Lara** Escuela Preparatoria No. 7 Universidad de Guadalajara

Secundaria	
Primer lugar	**Arturo Sánchez González** TEC 25 (sede BUAP)
Segundo lugar	**Abraham Jiménez Pacheco** DGB 2 (sede BUAP)
Tercer lugar	**Isamar Ortíz Hernández** Instituto Minerva, Perote Veracruz

12. Menciones Honoríficas del Concurso Pierre Fermat 2006

Superior	
Jonathan Toledo Toledo	Escuela Superior de Física y Matemáticas del Instituto Politécnico Nacional
Marco Antonio Figueroa Ibarra	Facultad de Matemáticas Universidad de Guanajuato
Alexandre Ramos Peón	Facultad de Matemáticas Universidad de Guanajuato
Oscar Montiel González	Facultad de Ciencias Físico Matemáticas Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Medio superior	
Manuel Alejandro Bustos Manriquez	Bachillerato Técnico No. 4 FIME de la Universidad de Colima
Manuel Alejandro Abad Najar	Bachillerato Técnico No. 4 FIME de la Universidad de Colima
Ariel Chávez González	Minatitlán, Veracruz Universidad Valle de Grijalva
Lourdes Cruz González	Cecyt No. 9 Juan de Dios Bátiz del Instituto Politécnico Nacional
Jorge Michell Nuñez Reyna	Colegio de Bachilleres No. 25 del Estado de San Luis Potosí

Secundaria	
Erika Beatriz Ugalde Olivarez	Institución Educativa Héroes de la Libertad, A. C.

CONCURSO PIERRE FERMAT 2007, GUÍA PARA NIVEL SUPERIOR

ESCUELA SUPERIOR DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS DEL I.P.N.

Problema 1. ¿ En cuánto tiempo harián A, B, C un trabajo juntos si A sólo puede hacerlo en seis horas más, B sólo en una hora más, y C sólo en el doble de tiempo ?

Problema 2. Un barril contiene a litros de vino y otro contiene b litros de agua; se toman c litros de cada barril para llevarlos al otro; esta operación se repite cualquier número de veces. Demostrar que si $c(a+b) = ab$, la cantidad de vino en cada barril permanecerá siempre constante después de la primera operación.

Problema 3. La media aritmética entre m y n y la media geométrica entre a y b son iguales cada una a $\dfrac{ma+nb}{m+n}$. Hallar m y n en función de a y b.

Problema 4. Un comerciante compra 54 kilos de té y café; si hubiera comprado cinco sextos de la cantidad de té y cuatro quintas de la cantidad de café, habría gastado nueve onceavos de lo que realmente gastó, y si hubiera comprado tanto té como café y viceversa, habría gastado \$5.00 pesos más de lo que gastó. El té es más caro que el café, y el precio de 6 kilos de café excede al de dos kilos de té por \$5.00. Hállese el precio de cada uno.

Problema 5. Se ha descubierto que la cantidad de trabajo hecho por un hombre en una hora varía en razón directa de su salario por hora e inversamente a la raíz cuadrada del número de horas que trabaja por día. Si puede terminar una pieza en seis días cuando trabaja 9 horas diarias a \$10.00 pesos por hora. ¿ Cuántos días tardará en terminar la misma pieza cuando trabaja 16 horas diarias a \$15.00 pesos por hora ?

Problema 6. Hallar el valor de

$$\frac{(4+\sqrt{25})^{3/2}+(4-\sqrt{15})^{3/2}}{(6+\sqrt{35})^{3/2}-(6-\sqrt{35})^{3/2}}.$$

Problema 7. Si las raíces de la ecuación

$$\left(1-q+\frac{p^2}{2}\right)x^2+p(1+q)x+q(q-1)+\frac{p^2}{2}=0$$

son iguales, demostrar que $p^2=4q$.

Problema 8. Si $n>1$ probar que la suma

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

no es un entero.

Problema 9. Demostrar que $(1+x)^{1+x}(1-x)^{1-x}>1$ si $x<1$, y deducir que

$$a^a b^b > \left(\frac{a+b}{2}\right)^{a+b}.$$

Problema 10. Demostrar que $(x^m+y^m)^n<(x^n+y^n)^m$ si $m>n$.

Problema 11. Resolver cada ecuación

a)

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^n \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^n \end{vmatrix}=0,$$

donde $a_1,a_2,\dots,a_n$ son números distintos.

b)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n-x \end{vmatrix}=0,$$

Problema 12. Calcular los siguientes determinantes reduciendo a la forma triangular

a)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

b)

$$B = \begin{bmatrix} a_1 & x & x & \dots & x \\ x & a_2 & x & \dots & x \\ x & x & a_3 & \dots & x \\ x & x & x & \dots & a_n \end{bmatrix}$$

Resp. $x(a_1 - x)(a_2 - x)\cdots(a_n - x)\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{a_1 - x} + \cdots + \dfrac{1}{a_n - x}\right)$

Problema 13. Se llama sucesión de Fibonacci[1] a la sucesión numérica que comienza con los números $1, 2$ y tal que todo número siguiente es igual a la suma de los dos anteriores, es decir, es la sucesión $1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$.

Demostrar que el n-ésimo término de la sucesión de Fibonacci es igual al determinante de n-ésimo orden de la matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Indicación. Obtener la relación de recurrencia $D_n = D_{n-1} + D_{n-2}$.

Problema 14. Demuestre que para $x, y > 0$, se cumple que

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^n \leq \frac{x^n + y^n}{2}$$

[1]Fibonacci L., matemático italiano del siglo $XIII$.

Interprete geométricamente este resultado en términos de la gráfica de x^n.

Problema 15. Sean $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ las coordenadas rectangulares de los puntos M_1, M_2, M_3 en el plano. Demostrar que el determinante

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

no varía en una rotación de los ejes y en un traslado del origen. Utilizando esto explicar su significado geométrico.

Problema 16. Por un canal de comunicación se va a transmitir un mensaje con 12 símbolos diferentes. Además de los 12 símbolos, el transmisor también enviará un total de 45 espacios en blanco entre los símbolos, con tres espacios como mínimo entre cada par de símbolos consecutivos. ¿ De cuántas formas puede el transmisor mandar el mensaje?

Problema 17. Determine el número total de soluciones enteras de la ecuación

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7, \text{ donde } \ x_i \geq 0 \ \text{ para toda } \ 1 \leq i \leq 4.$$

Problema 18. Determine el número total de soluciones enteras de $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 32$, donde

a) $x_i \geq 0,\ 1 \leq i \leq 4.$
b) $x_i > 0,\ 1 \leq i \leq 4.$
c) $x_1, x_2 \geq 5,\ x_3, x_4 \geq 7.$
d) $x_i \geq 8,\ 1 \leq i \leq 4.$
e) $x_i \geq -2,\ 1 \leq i \leq 4.$
f) $x_1, x_2, x_3 > 0, 0 < x_4 \leq 25.$

Problema 19. Hay cuatro bolas en una bolsa, pero no se sabe de qué color son; se saca una bola y se ve que es blanca. Hallar la probabilidad de que todas las bolas sean blancas.

Problema 20. Una bolsa contiene una moneda de valor M y un número de otras monedas cuyo valor agregado es m. Una persona saca una por una hasta que saca la moneda M. Hallar el valor de su esperanza matemática.

Problema 21. Si se coloca en una bolsa $6n$ billetes numerados $0, 1, 2, \dots, 6n-1$, y se sacan tres, demuestre que la probabilidad de que la suma de los números de ellos sea igual a $6n$ es

$$\frac{3n}{(6n-1)(6n-2)}.$$

Problema 22. De una bolsa que contiene n bolas, todas o bien blancas ó negras, siendo todos los números de cada una igualmente posibles, se saca una bola que resulta ser blanca; esta es devuelta a la bolsa y se saca otra bola que también resulta ser blanca. Si esta bola es devuelta a la bolsa, demuestre que la probabilidad de que la siguiente sacada dé una bola negra es $\frac{1}{2}(n-1)(2n+1)^{-1}$.

Problema 23. Si mn monedas han sido distribuídas en m bolsas, n en cada una, hallar:

a) la probabilidad de que dos monedas especificadas se encuentren en la misma bolsa;
b) en lo que la probabilidad se convertirá cuando r bolsas sean examinadas y se compruebe que no contienen ninguna de las monedas especificadas.

Problema 24. Dados a y b como catetos de un triángulo rectángulo, los geómetras babilónicos calcularon aproximadamente la hipotenusa c por la fórmula $c = a + \frac{b^2}{2a}$. Justifíquese esta aproximación por medio de la relación pitagórica y del teorema del binomio.

Problema 25. Resuelva los dos siguientes problemas hallados en los papiros de Moscú [2]

[2] La principal información relacionada con la geometría egipcia antigua son los papiros de Moscú y Rhind, textos matemáticos conteniendo 25 y 85 problemas, respectivamente, y fechados de aproximadamente 1850 a. de C. y 1650 a. de C.

a) El área de un rectángulo es 12, y la anchura es $\frac{3}{4}$ de la longitud, ¿ cuáles son sus dimensiones ?

b) Un cateto de un triángulo rectángulo es $2\frac{1}{2}$ veces el otro, el área es 20, ¿ cuáles son las dimensiones ?

Problema 26. a) En los papiros de Moscú se halla el siguiente ejemplo numérico: "Si le dicen a usted: una pirámide truncada de 6 para la altura vertical por 4 en una base por 2 en la superior. Debe elevarse al cuadrado este 4, lo que da como resultado 16. Se debe duplicar 4, el resultado es 8. Se debe elevar al cuadrado 2, el resultado es 4. Deben sumarse los 16, los 8 y los 4, el resultado es 28. Debe tomarse la tercera parte de 6, el resultado es 2. Debe tomarse 28 dos veces, el resultado es 56. Observe que es 56. Se verá que es correcto."

Demuestre que esto ilustra la fórmula general

$$V = \frac{h(a^2 + ab + b^2)}{3}$$

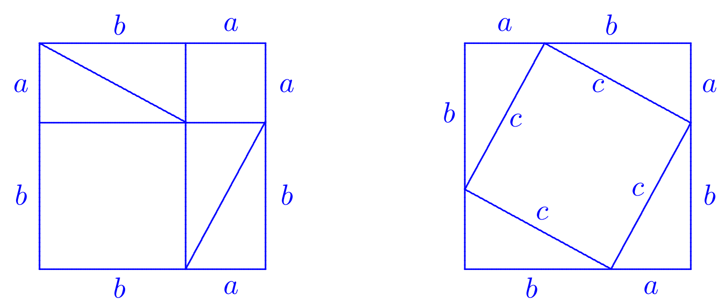
que da el volumen de un tronco de una pirámide cuadrada, en función de la altura h y los lados a y b de las bases.[3]

b) Considerando la fórmula familiar para el volumen de cualquier pirámide (el volumen es igual a un tercio del producto de la base y la altura), demuestre que el volumen de un tronco de pirámide está dado por el producto de la altura del tronco y la media heroniana de las bases del tronco. (Si m y n son dos números positivos, entonces $H = \dfrac{m + \sqrt{mn} + n}{3}$ se llama la media heroniana de los dos números.)

Problema 27. a) La tradición es unánime en atribuir a Pitágoras el descubrimiento independiente del teorema del triángulo rectángulo que ahora lleva universalmente su nombre, que el cuadrado de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual

[3]Este problema constituye la llamada "gran pirámide egipcia".

a la suma de los cuadrados de los catetos. Se sabe que este teorema lo conocierón los babilonios de la época de Hammurabi, más de mil años antes, pero la primera demostración general del teorema pudo haber sido dada por Pitágoras. Se han hecho muchas conjeturas respecto a la demostración que Pitágoras pudo haber dado, y se considera en general que posiblemente fue un tipo de disección de demostración tal como lo sugiere la siguiente figura. Hágase la demostración.



b) Enuncie y demuestre el recíproco del teorema de Pitágoras.

Problema 28. Indíquese cómo cada una de las siguientes identidades algebraicas puede establecerse geométricamente, suponiendo que a, b, c, d son cantidades positivas.

a) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

b) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,\ a > b$

c) $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b),\ a > b$

d) $a(b+c) = ab + ac$

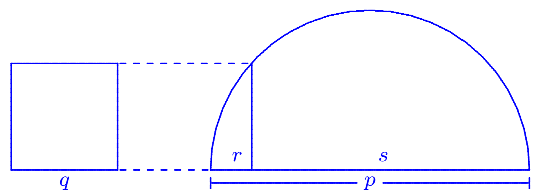
e) $(a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab,\ a > b$

f) $(a+b)(c+d) = ac + bc + ad + bd$

Problema 29. a) Sean r y s las raíces de la ecuación cuadrática $x^2 - px + q^2 = 0$, donde p y q son números positivos. Demuestre que $r + s = p, rs = q^2$, y r y s son ambas positivas si $q \leq \dfrac{p}{2}$.

b) Para resolver la ecuación cuadrática de la parte a) geométricamente para raíces reales, debemos hallar segmentos rectilíneos r

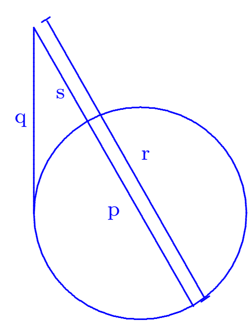
y s de los p y q dados. Esto es, debemos construir un rectángulo equivalente a un cuadrado dado, y que tengan la suma de su base y altura igual al segmento rectilíneo dado. Idéese una construcción adecuada que se base en la siguiente figura



y demuestre geométricamente que para que existan raíces reales debemos tener $q \leq \dfrac{p}{2}$.

c) Sean r y s las raíces de la ecuación cuadrática $x^2 - px - q^2 = 0$, donde p y q son números positivos. Demuestre que $r + s = p, rs = -q^2$, las raíces son reales, y la mayor numéricamente es positiva mientras que la otra es negativa.

d) Para resolver la ecuación cuadrática de la parte c) geométricamente, debemos hallar segmentos rectilíneos r y s de los p y q dados. Esto es, debemos construir un rectángulo equivalente a un cuadrado dado y que tenga la diferencia de su base y altura igual al segmento de recta dado. Idéese una construcción adecuada basada en la siguiente figura



e) Idéese construcciones para despejar o para obtener geométricamente raíces reales de las ecuaciones cuadráticas

$$x^2 + px + q^2 = 0 \ \text{ y } \ x^2 + px - q^2 = 0,$$

donde p y q son números positivos.

f) Dado un segmento unidad, resuelve geométricamente la ecuación cuadrática $x^2 - 7x + 12 = 0$.

g) Dado un segmento unidad, resuelve geométricamente la ecuación cuadrática $x^2 + 4x - 21 = 0$.

h) Con regla y compás, divida un segmento m en dos partes tales que la diferencia de sus cuadrados sea igual a su producto.

i) Demuestre que en la parte h), el segmento mayor es una medida proporcional entre el segmento menor y todo el segmento. (El segmento de la recta se dice que está dividido en una razón "extrema y media".)

Problema 30. a) Definamos $f(x)$ para todos los valores reales de x de la siguiente forma:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \text{ irracional} \\ 1 & x \text{ racional} \end{cases}$$

Demuestre que $f(x)$ es discontinua en todo punto.

b) Considere, por otra parte,

$$h(x) = \begin{cases} 0 & x \text{ irracional} \\ \\ \dfrac{1}{q} & x = \dfrac{p}{q} \text{ racional en sus menores términos} \end{cases}$$

(Se dice que el número racional p/q está expresado "en sus menores términos" cuando los enteros p y q no tienen factores comunes mayores que 1 y $q > 0$. De esta manera, $f(16/27) = 1/27$.) Demuestre que $h(x)$ es continua para todos los valores irracionales y discontinua para todos los valores racionales.

Problema 31. Si $f(x)$ satisface la ecuación funcional

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

para todos los valores de x e y, encuentre los valores de $f(x)$ para los valores racionales de x y demuestre, si $f(x)$ es continua, que $f(x) = cx$ donde c es una constante.

Problema 32. Si n es un número natural, demuestre que

$$\frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n\sqrt{5}}$$

es un número natural.

Problema 33. Demuestre las propiedades siguientes de los coeficientes binomiales:

a) $$1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$$

b) $$1 - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$$

c) $$\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \cdots + n\binom{n}{n} = n(2^{n-1})$$

d) $$1 \cdot 2\binom{n}{1} + 2 \cdot 3\binom{n}{2} + \cdots + (n-1) \cdot n\binom{n}{n} = n(n-1)(2^{n-2})$$

e) $$1 + \frac{1}{2}\binom{n}{1} + \frac{1}{3}\binom{n}{2} + \cdots + \frac{1}{n+1}\binom{n}{n} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$$

Problema 34. Demuestre que para todo número natural n existe un número natural k tal que

$$(\sqrt{2}-1)^n = \sqrt{k} - \sqrt{k-1}.$$

Problema 35. Demuestre la relación

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{k+1}} \sum_{i=1}^{n} i^k = \frac{1}{k+1}$$

para cualquier entero no negativo.

Sugerencia: Use inducción con respecto a k y la relación

$$\sum_{i=1}^{n}[i^{k+1} - (i-1)^{k+1}] = n^{k+1}.$$

Expanda $(i-1)^{k+1}$ en potencias de i.

Problema 36. Sean p y q números naturales arbitrarios, hallar:

a) $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{(k+p)(k+p+q)}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{(k+p)(k+p+q)}$

Problema 37. Supongamos que los números x_1, x_2, x_3 y a_{ik} $(i, k = 1, 2, 3)$ son todos positivos y , además, que $a_{ik} \leq M$ y $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1$. Demuestre que

$$a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \cdots + a_{33}x_3^2 \leq 3M.$$

Problema 38. Demuestre que

$$2(\sqrt{n+1} - 1) < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}.$$

Problema 39. Demuestre que

a) $(-1)^n \displaystyle\int_{-1}^{1} (x^2-1)^n dx = \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)1}.$

b) $\dbinom{n}{k} = \left[(n+1)\displaystyle\int_{0}^{1} x^k (1-x)^{n-k} dx\right]^{-1}.$

Problema 40. Integre $\displaystyle\int \frac{1}{x^6+1} dx.$

Problema 41. Converge o diverge la integral

$$\int_0^{\infty} \frac{x\,dx}{1 + x^2 \operatorname{sen}^2 x},$$

justifique su respuesta.

Problema 42. Demuestre que no existe

$$\int_0^{\infty} \operatorname{sen}^2\left[\pi\left(x + \frac{1}{x}\right)\right] dx.$$

Problema 43. a) Si a es un número positivo fijo, demuestre que

$$\lim_{h\to 0}\int_{-a}^{a}\frac{h}{h^2+x^2}dx=\pi.$$

b) Si $f(x)$ es continua en el intervalo $-1\le x\le 1$, demuestre que

$$\lim_{h\to 0}\int_{-1}^{1}\frac{h}{h^2+x^2}f(x)dx=\pi f(0).$$

Problema 44. Supongamos que $|\alpha|\neq|\beta|$, pruebe que

$$\lim_{T\to\infty}\int_{0}^{T}\operatorname{sen}\alpha x\operatorname{sen}\beta x dx=0.$$

Problema 45. a) Si $\displaystyle\int_{a}^{\infty}\frac{f(x)}{x}dx$ converge para cualquier valor positivo de a, y si $f(x)$ tiende a un límite L cuando $x\to 0$, demuestre que

$$\int_{0}^{\infty}\frac{f(\alpha x)-f(\beta x)}{x}dx$$

converge para α y β positivos y tiene el valor $L\ln\dfrac{\beta}{\alpha}$.

b) Aplique el inciso anterior, y pruebe las siguientes integrales:

i) $\displaystyle\int_{0}^{\infty}\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}dx=\ln\frac{\beta}{\alpha}.$

ii) $\displaystyle\int_{0}^{\infty}\frac{\cos\alpha x-\cos\beta x}{x}dx=\ln\frac{\beta}{\alpha}.$

Problema 46. a) Si $f(x)=\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$,

i) encontrar $f\left(\dfrac{1}{n\pi}\right)$, $n=1,2,3,\ldots,$

ii) encontrar $f\left(\dfrac{2}{n\pi}\right)$, $n=1,5,9,\ldots,$

iii) encontrar $f\left(\dfrac{1}{n\pi}\right)$, $n=3,7,11\ldots,$

iv) ¿ Cómo se comporta la derivada $f'(x)$ cuando $x\to 0$?

b) i) ¿ Cómo se comporta $2^{-1/x}$ cuando $x\to 0^+$?

ii) ¿ Y cuándo $x \to 0^-$?

iii) ¿ Qué puede decirse respecto al $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{1+2^{-1/x}}$?

Problema 47. Un manantial está situado en $(0, a)$, y la casa de una persona está en $(b, 0)$, donde $a > 0, b > 0$. Va a tenderse una tubería en dos partes rectas, la primera de ellas desde la fuente hasta $(x, 0)$, y la segunda desde $(x, 0)$ a la casa. Las partes cuestan c_1 y c_2 pesos por unidad de longitud, respectivamente.

a) Demostrar que el costo total de la tubería, para cualquier valor de x, es
$$f(x) = c_1\sqrt{a^2 + x^2} + c_2|b - x|.$$

b) Demostrar que f tiene su mínimo absoluto para un cierto x tal que $0 < x \leq b$.

c) Determinar las desigualdades que deben satisfacer c_1, c_2, a y b si f alcanza su mínimo para x tal que $0 < x < b$.

Problema 48. Un cohete se lanza verticalmente hacia arriba desde la Tierra. Quema combustible líquido a una razón variable, siendo la razón de N galones por milla cuando su altura es de 10 millas. Si la velocidad del cohete en ese instante es de $1,000$ millas por hora, ¿ cuál es la razón instantánea de consumo de combustible en galones por hora ? Sea x la altura del cohete t horas después del lanzamiento. Supóngase que la razón de consumo de combustible es $kx^{-1/2}$ galones por milla y $3k(ct)^{1/2}$ galones por hora, donde c y k son constantes positivas. Encontrar una fórmula para la razón de elevación del cohete y deducir la que conecta a x con t.

Problema 49. Demostrar que $\dfrac{1}{3} < \ln 1.5 < \dfrac{1}{2}$.

Problema 50. Demostrar que para ningún valor de m la ecuación $x^3 - 3x + m = 0$ posee dos raíces distintas en el intervalo $0 \leq x \leq 1$. Usar el Teorema de Rolle.

Problema 51. Demostrar las siguientes desigualdades

a) $\sqrt{x+1} < 4\dfrac{x-15}{8}$, si $15 < x$.

b) $\tan^{-1} x < \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{x-1}{2}$, si $1 < x$.

c) $\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1-x}{1+x^2} < \tan^{-1} x < \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1-x}{2}$, si $0 < x < 1$.

d) $\dfrac{h}{1+h^2} < \tan^{-1} h$, si $0 < h$.

e) $\dfrac{1}{9} < \sqrt{66} - 8 < \dfrac{1}{8}$.

Problema 52. Supóngase que

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{2n}} & \text{si } \ x = \dfrac{1}{2^n}, n = 1, 2, 3, \ldots \\ \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

¿ Es diferenciable f en $x = 0$? ¿ Qué sucedería si la definición de f hubiera sido $f\left(\dfrac{1}{2^n}\right) = \dfrac{1}{2^{n+1}}$?

Problema 53. Considere el siguiente resultado y aplíquelo en el problema:

Teorema. Sea f una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$. Suponga que F es cualquier función diferenciable, tal que $F'(x) = f(x)$ cuando $a \leq x \leq b$. Entonces

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

a) Las tablas comunes de integración enlistan la fórmula

$$\int \frac{dx}{a + b\cos x} = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \tan^{-1} \left[\frac{\sqrt{a^2 - b^2} \tan \dfrac{x}{2}}{a + b} \right], a^2 > b^2.$$

Sea

$$F(x) = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \tan^{-1} \left[\frac{\sqrt{a^2 - b^2} \tan \dfrac{x}{2}}{a + b} \right]$$

Verificar que

$$F'(x) = \frac{1}{a + b\cos x}$$

siempre que x no sea un múltiplo impar de π. ¿ Qué se puede decir acerca de $F(x)$ para estos valores excepcionales de x ?

b) Suponiendo $0 < b < a$, encontrar el límite de $F(x)$ cuando $x \to \pi^-$ y cuando $x \to \pi^+$.

c) Considere a $F(x)$ definida en π por su límite cuando $x \to \pi$ desde la izquierda, usar el teorema previamente enunciado para demostrar que

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{a + b\cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}, \text{si } a > b > 0.$$

d) Encontrar el valor de $\displaystyle\int_0^{3\pi/2} \frac{dx}{5 - \cos x}$.

Problema 54. a) Analizar en forma crítica la fórmula de integración

$$\int \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2 \operatorname{sen}^2 x} = \frac{1}{ab}\tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\tan x\right),$$

suponiendo que a y b son positivos. Comparar con el problema anterior incisos a) y b).

b) Explicar la razón de la falla aparente del Teorema enunciado en el problema anterior en el resultado obviamente falso

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{\cos^2 x + 4\operatorname{sen}^2 x} = \frac{1}{2}\tan^{-1}(2\tan x)\Big|_0^{\pi} = 0,$$

c) Demostrar que

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\operatorname{sen}^2 x} = \frac{\pi}{2ab}.$$

Problema 55. Dos escaleras de 1.80 y 1.20 metros de largo, respectivamente, se apoyan en los lados opuestos de un pasillo que está entre dos edificios, quedando los pies de las escaleras contra las bases de los edificios. Si dichas escaleras se cruzan a una distancia de 3 metros por encima del pasillo, ¿ cuál es la anchura del pasillo ? Hállese una solución aproximada por medio de dibujos. Un tratamiento algebraico de este problema requiere la solución de una ecuación cuártica. Si a y b representan las longitudes de las escaleras, c la altura en la cual se cruzan y x la anchura del pasillo, se puede demostrar que

$$(a^2 - x^2)^{-1/2} + (b^2 - x^2)^{-1/2} = c^{-1}.$$

Problema 56. Demuestre que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$.

Problema 57. Demostrara que:

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2} \right) = \frac{1}{2}$.

b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(2n)^2} \right) = 0$.

c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n}} \right) = \infty$.

d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) = 1$.

Problema 58. Demostrar que

$$\frac{1}{(y-z)^2} + \frac{1}{(z-x)^2} + \frac{1}{(x-y)^2} = \left(\frac{1}{y-z} + \frac{1}{z-x} + \frac{1}{x-y} \right).$$

Dudas, comentarios, sugerencias, correcciones etc., sobre esta guía, contactar a:

Abelardo Santaella Quintas
fermat@esfm.ipn.mx, aquintas@esfm.ipn.mx

Notas y Elucubraciones

Notas y Elucubraciones

Notas y Elucubraciones