CONCURSO PIERRE FERMAT 2006, GUÍA PARA NIVEL MEDIO–SUPERIOR

ESCUELA SUPERIOR DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS DEL I.P.N.

Problema 1. *Un barco se desplaza 5 horas sin interrupción río abajo desde la ciudad A a la ciudad B. De vuelta avanza contra la corriente (con su marcha ordinaria y sin detenerse) durante 7 horas. ¿Cuántas horas necesitara una balsa para desplazarse de la ciudad A a la ciudad B, si se desplaza a la misma velocidad de la corriente?*

Problema 2. *Demostrar el criterio de divisibilidad por 19:* "Un número es múltiplo de 19 sólo en el caso en que sus decenas más el doble de sus unidades formen un múltiplo de 19".

Problema 3. *Sean a, b, c los lados de un triángulo y sea S su área. Demostrar que:*

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}\mathrm{S}.$$

¿En qué casos se cumple la igualdad?

Problema 4. *Considérese un cono de revolución con una esfera inscrita tangente a la base del cono. Un cilindro es circunscrito a la esfera, tal que una de sus "tapas" está en la base del cono. Sea V_1 el volumen del cono y V_2 el volumen del cilindro.*

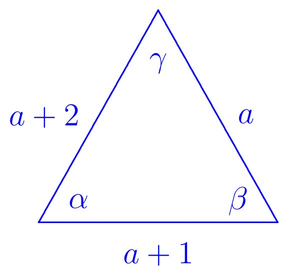
i) Demostrar que $\mathrm{V}_1 \neq \mathrm{V}_2$.

ii) Encontrar el número más pequeño k para el cual $\mathrm{V}_1 = k\mathrm{V}_2$; para este caso, construir el ángulo subtendido por el diámetro de la base del cono al vértice del mismo.

Problema 5. *Encontrar todos los valores de $x \in [0, 2\pi]$ que satisfagan la desigualdad*

$$2\cos x \leq \left| \sqrt{1 + \operatorname{sen} 2x} - \sqrt{1 - \operatorname{sen} 2x} \right| \leq \sqrt{2}.$$

Problema 6. *Demostrar que existe uno y sólo un triángulo tal que las longitudes de los lados son enteros consecutivos y uno de sus ángulos es el doble de largo de otro.*

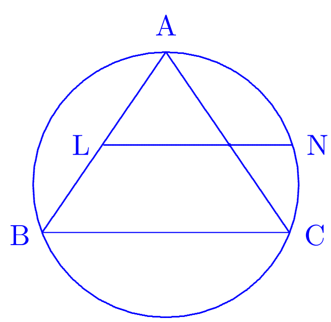


Problema 7. *Encontrar todos los números enteros* m, n *tales que:*

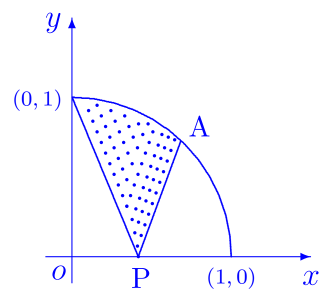
$$\frac{m^2}{8!} + \frac{1}{7!} = \frac{3}{4 \cdot 7!}\, n! + \frac{21}{8!}.$$

Problema 8. *El triángulo* $\triangle \mathrm{ABC}$ *es equilátero. Sean* L, M *los puntos medios de los lados* AB, AC *respectivamente. Sea* N *el punto de intersección de la recta que pasa por* L *y* M *con la circunferencia que circunscribe al trángulo* $\triangle \mathrm{ABC}$. *Encontrar el valor de la razón:*

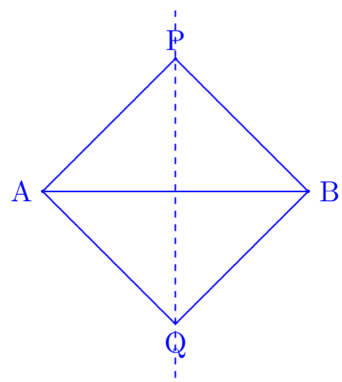
$$\frac{\mathrm{LM}}{\mathrm{MN}}.$$



Problema 9. *Considérese el arco de la circunferencia de centro o y radio 1, como se observa en la figura. Si* $\measuredangle \mathrm{B}o\mathrm{A} = \frac{\pi}{3}$ *y si el área de la región punteada es igual a la mitad del área subtendida por el arco, encontrar* P.



Problema 10. *Encontrar dos puntos* P, Q, *sobre la mediatriz del segmento* AB *tales que los ángulos* ∠AQB, ∠BPA *sean rectos. Véase la figura:*



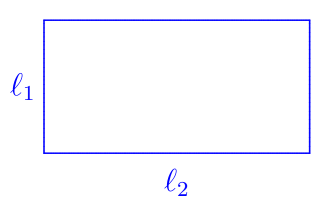
Responder con verdadero o falso:

i) *Los puntos* P, Q *son equidistantes del segmento* AB.

ii) *El polígono de vértices* A, P, B, Q *es un cuadrado.*

iii) *Los puntos* A, P, B, Q *se encuentran sobre una circunferencia, con centro en el punto medio del segmento* AB.

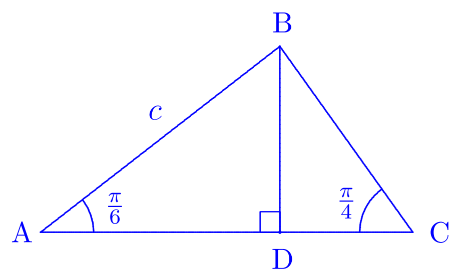
Problema 11. *Considérese el rectángulo* P, *mostrado en la figura siguiente:*



¿Existirán números enteros ℓ_1, ℓ_2 de manera que el perímetro del rectángulo P *sea igual a su área.*

Problema 12. *Entre los números $\sqrt{7}+\sqrt{10}$, $\sqrt{3}+\sqrt{19}$ escribir el símbolo adecuado: $>$ o $<$.*

Problema 13. *Considérese el siguiente triángulo $\triangle \mathrm{ABC}$:*



Si el lado c del triángulo $\triangle \mathrm{ABC}$ mide 8 unidades, encontrar la medida del ángulo $\angle \mathrm{ABC}$.

Problema 14. *Si:*

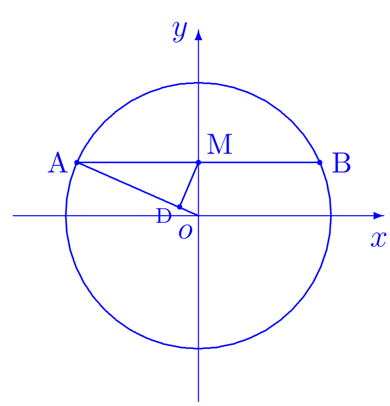
$$f\left(x\right)=\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \quad \textit{con} \;\; -1<x<1,$$

expresar:

$$f\left(\frac{3x+x^3}{1+3x^2}\right),$$

en términos de $f\left(x\right)$.

Problema 15. *En la siguiente figura:*



El radio de la circunferencia es r *y* $\overline{\mathrm{AB}} = r$. *Si el ángulo* $\angle\mathrm{ADM}$ *es recto, encontrar el área del triángulo* $\triangle\mathrm{ADM}$ *como una función de* r.

Problema 16. *Demostrar que las diagonales de todo paralelogramo dividen a dicho paralelogramo en dos pares de triángulos congruentes.*

Problema 17. *Encontrar los valores de* $m > 0$, *que hagan que la circunferencia* $x^2 + y^2 = m$ *y la recta* $x + y = \sqrt{2m}$ *sean tangentes.*

Problema 18. *Sea* a *un número real arbitrario, pero fijo. Defínase la función "salto en* a*" como:*

$$h(x) = \begin{cases} 1 & si \;\; x > a \\ 0 & si \;\; x < a \end{cases}.$$

Considérese ahora la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 3\operatorname{sen} x & si \;\; x \leq \pi \\ x^2 & si \;\; \pi < x \leq 2\pi \\ x - \cos x & si \;\; 2\pi < x \end{cases}.$$

¿Es posible definir a la función f *en términos de la función "salto en* a*" para* $a = \pi$ *y* $a = 2\pi$*?*

Problema 19. *Considérese la siguiente sucesión de números enteros:*

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ 144,\ \cdots\cdots$$ [1]

i) *Encontrar los siguientes cinco números de la sucesión.*

ii) *Encontrar una "fórmula" que permita encontrar cualquier número de la sucesión, es decir, encuentre una función* f *que tome valores en los números enteros y permita conocer el* n*–ésimo término de la sucesión en función de los anteriores. Por ejemplo, observe que si definimos* $f(1) = 1$, $f(2) = 1$, *entonces* $f(3) = 2 = f(1) + f(2)$, *a su vez* $f(4) = 3 = 1 + 2 =$

[1] Este tipo de nḿeros recibe el nombre de "números de Fibonacci".

$f(2) + f(3)$, etc. Ahora le será fácil encontrar la fórmula para $f(n)$.

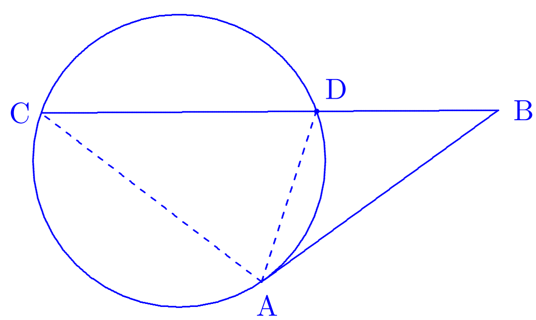
Problema 20. *Considérese la siguiente sucesión de números enteros:*

$$1,\ 3,\ 4,\ 7,\ 11,\ 18,\ 29,\ 47,\ 76,\ 123,\ 199,\ \cdots\cdots$$ [2]

i) Encontrar los siguientes cinco números de la sucesión.

ii) Haga lo mismo que en el inciso (ii) del problema precedente.

Problema 21. *El segmento* AB *es tangente a la circunferencia en el punto* A*, el segmento* CB *es una secante a la circunferencia y* D *es el punto donde la secante* CB *corta a la circunferencia. Véase la figura.*



Demostrar que:

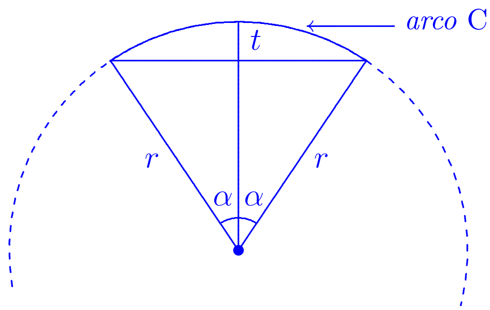
i) Los triángulos $\triangle\mathrm{ABC}$ *y* $\triangle\mathrm{ABD}$ *son semejantes.*

ii) $\dfrac{\mathrm{CB}}{\mathrm{AB}} = \dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{DB}}$.

iii) $\overline{\mathrm{AB}}^{\,2} = \overline{\mathrm{CB}}\,\overline{\mathrm{CD}}$.

Problema 22. *El arco* C *está subtendido por dos radios de una circunferencia, como se observa en la siguiente figura:*

[2]Este tipo de números reciben el nombre de "números de Lucas".



Si $\measuredangle\alpha = \dfrac{\pi}{6}$, *encontrar el valor de la distancia* t.

Problema 23. *El profesor Sabino comienza su ejercicio matinal cuando las manecillas del reloj se encuentran una sobre la otra entre las 8 y las 9 la mañana y lo termina cuando las manecillas forman un ángulo de* π *rad., entre las 2 y las 3 de la tarde. ¿Cuántos minutos dura su ejercicio?*

Problema 24. *Un tanque contiene* x *litros de ácido, un segundo recipiente contiene* x *litros de agua. Se toman* z *litros de ácido y se vierten en el tanque del agua, la mezcla se agita hasta homogeneizarla, enseguida se toman* z *litros de esta mezcla y se vierten en el tanque del ácido. Encontrar:*

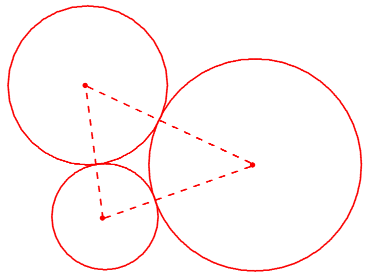
$i)$ *La concentración del ácido en el tanque del agua.*

$ii)$ *La concentracíon del agua en el tanque del ácido.*

Problema 25. *En dos años la edad de* "pepito" *será* $\dfrac{3}{4}$ *de la edad de su hermana, dos años después la edad de él será* $\dfrac{2}{3}$ *de la edad de ella. ¿Cuáles son las edades de ellos?*

Problema 26. *Uno de los lados de un rectángulo es de* $12mts.$, *si el otro lado se disminuye en* $4mts$, *la diagonal disminuye* $2mts$. *¿Cuánto mide cada uno de los lados del rectángulo?*

Problema 27. *Tres circunferencias son tangentes externamente entre sí, como se muestra en la figura.*

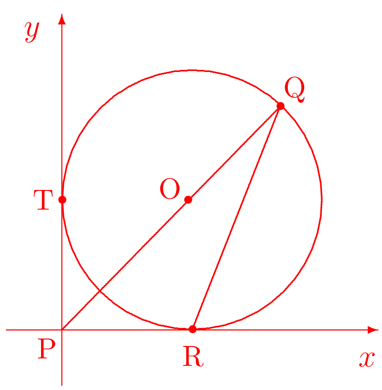


Si las distancias entre sus respectivos centros son 23, 25 y 20 unidades, encontrar sus respectivos radios.

Problema 28. *Uno de los ángulos de un triángulo es el doble del segundo ángulo y* 25° *más que el tercer ángulo. Encontrar el valor de cada uno de los tres ángulos del triángulo.*

Problema 29. *El radio de la base de dos conos circulares rectos es de* $8\,cm$*.La altura del primero de ellos excede en* $9\,cm$*. la altura del segundo. La longitud de la inclinación del primer cono excede en* $7\,cm$*. la del segundo. Encontrar la altura de ambos conos.*

Problema 30. *Una circunferencia de radio* 1*, es tangente a los ejes coordenados en los puntos* T *y* R*, como se observa en la figura.*



Si O *es el centro de la circunferencia. Encontrar el perimétro y el área del triángulo* $\triangle\mathrm{PQR}$*.*

Problema 31. *Sean* p*,* q*,* r*, números naturales. Si* q*,* r *son números primos, encontrar* todas *las soluciones de la ecuación:*

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{r}\,.$$

Problema 32. *Encontrar tres dígitos* e, j, p, *tales que:*

$$(je)^2 = bebe.$$

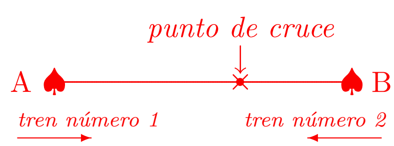
Problema 33. *El área de la página de un libro es de* $632.61 cm^2$*., el área de la parte impresa es de* $427.39 cm^2$*., los márgenes inferior, derecho e izquierdo son de* $2.5 cm$*. el márgen superior es de* $3 cm$*. ¿Cuáles son las dimensiones de la página?*

Problema 34. *Un grupo de pescadores renta una lancha por* $\$300$ *para ir de pesca. Sin embargo dos de ellos enferman repentinamente y no acuden a la cita, a consecuencia de ello, cada uno de los miembros restantes del grupo paga* $\$12.50$ *más de lo presupuestado. ¿De cuántos miembros se componía originalmente el grupo?*

Problema 35. *Los lados de un triángulo miden 5, 6 y 8, respectivamente. Encontrar la longitud de cada una de sus medianas.*

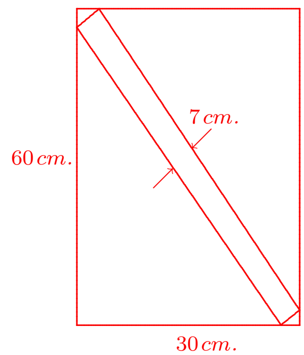
Problema 36. *El área de un rectángulo es de* $288 cm^2$ *y su périmetro es de* $72 cm$*. Encontrar sus dimensiones.*

Problema 37. *Dos trenes parten simultáneamente de las ciudades opuestas* A *y* B*.*
El tren número 1 parte de la ciudad A *rumbo a la ciudad* B *y el tren número 2 parte de la ciudad* B *rumbo a la ciudad* A*.*



Ambos trenes viajan con velocidades constantes pero diferentes. El tren número 1 *llega a la ciudad* B *cuatro horas después de cruzarse con el segundo tren, a su vez el segundo tren llega a la ciudad* A*, dos horas y quince minutos después de pasar por el punto de cruce. Encontrar el tiempo invertido por cada tren en hacer el viaje.*

Problema 38.



De una hoja de cartón rectangular de $60\,cm.$ *de alto por* $30\,cm.$ *de ancho, se recorta una tarjeta de* $7\,cm.$ *de ancho en la posición que se muestra en la figura. Encontrar la longitud de la tarjeta.*

Problema 39. *La resistencia eléctrica de un alambre es directamente proporcional a su longitud e inversamente proporcional al cuadrado de su diámetro. Si un alambre de* $15.5\,mts.$ *de largo y* $0.5\,mm.$ *de diámetro tiene una resistencia de* 3.5 *ohmios., encontrar la resistencia eléctrica de un alambre del mismo material que el anterior, pero de* $23\,mts.$ *de longitud y* $0.5\,mm.$ *de diámetro.*

Problema 40. *La variable* z *es directamente proporcional al cubo de la variable* x *e inversamente proporcional al cuadrado de la variable* y*. Si* $z|_{(4,6)} = 14$*, encontrar* $z|_{(2,3)}$.

Problema 41. *Si la variable* y *es directamente proporcional a la raíz cuadrada de la variable* x *y si* $y|_6 = 10$*, encontrar* $y|_{216}$.

Problema 42. *La variable* z *es directamente proporcional a las variables* x*,* y*. Si* $z|_{(6,10)} = 15$*, encontrar:*

i) $z|_{(8,2)}$.
ii) $z|_{(5,7)}$.

Problema 43. *Considérese la fracción* $\dfrac{m}{n}$*. Supóngase que se cumplen las condiciones:*

$$\frac{m+5}{n+5} + \frac{m}{n} = \frac{28}{25}\,;$$

$$\frac{m}{n} - \frac{m-5}{n-5} = \frac{9}{25}\,.$$

Encontrar la fracción $\dfrac{m}{n}$.

Problema 44. *Un cubo de madera es pintado de rojo y después cortado en 1000 cubitos iguales. Encontrar:*

i) *El número de cubitos con ninguna cara pintada.*
ii) *El número de cubitos con una cara pintada.*
iii) *El número de cubitos con dos caras pintadas.*
iv) *El número de cubitos con tres caras pintadas.*
v) *¿Existirá al menos un cubito con cuatro caras pintadas?*

Problema 45. *Si 10 gatos apañan 5 peces en 10 minutos, ¿cuántos peces serán apañados por 60 gatos en una hora?*

Problema 46. *¿Cuántos números diferentes de 3 dígitos pueden construirse si:*

i) *Ninguno de los dígitos es el cero y se permiten repeticiones?*
ii) *Dos dígitos son pares y no se permiten repeticiones?*
ii) *Dos dígitos son impares y se permiten repeticiones?*

Problema 47. *Cuando Pablo tenía 4 años, Sofía tenia 7 años. Cuando Pablo tenía 7 años, Carmen tenía 5 años. ¿Cuáles eran las edades de Pablo y Sofía cuando Carmen tenía 7 años?*

Problema 48. *¿Cuántas palabras con dos consonantes y dos vocales se forman con las letras de la frase:*

"gato bonito"?

Problema 49. *Se toman 15 puntos diferentes en el plano con la condición de que tomados tres a tres no sean colineales. ¿Cuántas rectas diferentes pueden construirse con ellos?*

Problema 50. *Si se escogen 5 puntos distintos sobre una circunferencia, ¿cu'al es el número máximo de triángulos interiores a la circunferencia y que no se traslapen se pueden formar, tomando estos puntos como vértices?*

Problema 51. *Un avión hace un viaje de* $550\,km.$, *con el viento en contra en una hora y quince minutos, el viaje de regreso a favor del* *viento le toma solamente una hora. Encontrar la velocidad del avión en el aíre así como la del viento.*

Problema 52. *Si 31 monedas de oro y 36 monedas de plata pesan* $1kg$ *y 310 monedas de oro y 40 monedas de plata pesan* $2kg$*, ¿cuánto pesa cada moneda de oro y cuánto cada moneda de plata?*

Problema 53. *Si cada arista de un cubo se reduce a la tercera parte de su longitud, ¿cuántas veces cabe el cubo resultante en el cubo original?*

Problema 54. *Un ciclista alcanza una velocidad de* $25km/hr$ *en terreno plano,* $15km/hr$ *en subida y* $35km/hr$ *en bajada. Durante un viaje de* $100km$*. el ciclista invierte 4 horas con 24 minutos en la "ida" y 4 horas con 36 minutos en el regreso. Encontrar la distancia recorrida en terreno plano en subida y en bajada, por el ciclista.*

Problema 55. *Un cartógrafo debe colorear un mapa con 4 diferentes colores. ¿De cuántas formas puede colorear el mapa si cuenta con una paleta de 10 colores?*

Problema 56. *¿De cuántas formas diferentes se pueden acomodar 7 personas.*

- i) *En "fila india".*
- ii) *Alrededor de una mesa redonda?*

Problema 57. *Sea* PQ *un segmento de recta tal que* $\overline{\mathrm{PQ}} = r$*. Dados tres puntos* A, B, C, *sobre el segmento* PQ, *encontrar un punto* M *en el segmento* PQ, *tal que:*

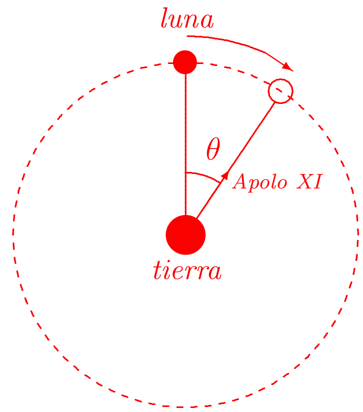
$$\frac{\overline{\mathrm{MA}}}{\overline{\mathrm{MB}}} \div \frac{\overline{\mathrm{CA}}}{\overline{\mathrm{CB}}} = r.$$

Problema 58. *En el plano cartesiano se escogen 7 rectas paralelas entre sí y otras cinco rectas paralelas entre sí, pero no paralelas a las 7 primeras. ¿Cuántos paralelogramos se forman con estos dos conjuntos de rectas?*

Problema 59. *El periodo de vida de una* ballena *es el de cuatro veces el de una* cigüeña*, la cual vive 85 años más que un* conejillo de indias*, que vive 6 años menos que un* buey*, el cual vive 9 años menos que un* caballo*, que vive 12 años más que una* gallina*, que vive 282 años menos que un* elefante*, que vive 283 años más que un* perro*, que vive dos años más que un* gato*, que vive 135 años menos que una* carpa*, que vive el doble de un* camello*, el cual vive 1066 años menos que el total de los periodos de vida de todas estas criaturas. ¿Cuál es el periodo de vida de cada uno de estos animales?*

Problema 60.

El cohete Apolo XI *fue lanzado formando un ángulo θ con la luna que se encontraba en el cenit. Suponiendo que la luna describe una óbita circular alrededor de la tierra con un radio de 240,000 millas con un periodo de 30 días y que el cohete viaja a una velo–cidad de 25,000 millas por hora. Encontrar el ángulo θ con el que fue lanzado el cohete para que interceptase a la luna.*



Resp. $\theta = 4.8°$.

Si el periodo de la órbita lunar se considera de 27 dias, ¿cuál es el valor del ángulo θ?

Problema 61. *¿Cuántos rectángulos de lados a, b, respectivamente, con un vértice en el origen y dos lados coincidentes con los ejes, se pueden construir?*

a) 2, *b*) 4, *c*) 6, *d*) 8.

Problema 62. *¿Cuántos triángulos equiláteros de lado b, con un vértice en el origen y una altura en el eje y, se pueden construir?*

a) 2, *b*) 3, *c*) 4, *d*) *Ninguna opción.*

Problema 63. *La ecuación de la recta que pasa por $(1, 1)$ y cuya distancia al punto $(0, 0)$ es 1, es:*

a) $2y+3=5$, *b*) $x=1$, *c*) $y-2=0$.

Problema 64. *La distancia de la recta* $4x-5y+15=0$ *al punto* $(2,1)$ *es:*

a) 2, *b*) $3\frac{1}{2}$, *c*) 4, *d*) 0.

Problema 65. *¿Cuántas rectas que pasan por el punto* $(-2,2)$ *forman un triángulo de área 1, con los ejes de coordenadas?*

a) 2, *b*) 1, *c*) 4, *d*) *Ninguna.*

Si la respuesta no fue (*d*), *encontrar las ecuaciones de las rectas.*

Problema 66. *Las rectas* $3x-4y-19=0$, $4x+3y-17=0$, $x+7=0$ *forman un triángulo. El centro y el radio de la circunferencia inscrita al triángulo son respectivamente:*

a) $(-2,0)$; 5, *b*) $(2,2)$; $\frac{5}{2}$, *c* $(1,0)$; 1.

Problema 67. *Encontrar el centro y el radio de la circunferencia que circunscribe a triángulo de vértices* $(0,2)$, $(0,0)$, $(1,0)$. *Responder además:*

i) *¿El centro de la circunferencia se encuentra sobre la recta que biseca al ángulo recto del triángulo?*

ii) *¿El centro de la circunferencia es el punto medio de la hipotenusa del triángulo?*

Problema 68. *¿Es posible escribir los 11 números desde 1985 hasta 1995 en algún orden de modo que el número de 44 dígitos que se obtiene sea primo?*

Problema 69. *Encontrar el menor número natural que es suma de 9 naturales consecutivos, es suma de 10 naturales consecutivos y además es suma de 11 naturales consecutivos.*

Problema 70. *Con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 se forman tres números a, b, c, de tres dígitos distintos cada uno, ¿se puede lograr que ninguno sea múltiplo de 3?*

CONCURSO PIERRE FERMAT 2006, GUÍA PARA NIVEL SECUNDARIA

ESCUELA SUPERIOR DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS DEL I.P.N.

Problema 1. *Dado el siguiente arreglo de números*

1	1	1						
1	2	3	2	1				
1	3	6	7	6	3	1		
1	4	10	16	19	16	10	4	1

Encontrar la regla general para obtener el siguiente renglón. Usar esta regla para obtener los siguientes tres renglones de la tabla.

Problema 2. *¿Cuál de los números 2^{100}, 3^{75} es más grande?*

Problema 3. *Utilizando la factorización de una* "diferencia de cuadrados": $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$, *obtener el producto* 47×53.

Problema 4. *Considérense dos triángulos equiláteros, ambos con lados de* 10 *unidades, los cuales se sobreponen formando una* "estrella de David", *siendo el área común de intersección un hexágono regular. Encontrar el área de dicho hexágono.*

Problema 5. *La suma de dos números impares consecutivos es un sexto del producto de ellos incrementado en* 1. *¿Qué números son estos?*

Problema 6. *Un triángulo tiene lados de longitud* 3, 4 *y* 5 *unidades, respectivamente. Encontrar el radio y el área de la circunferencia ins–crita al triángulo.*

Problema 7. *El perímetro de un rectángulo es igual a* 29 *metros y el largo excede al ancho en* 1.5 *metros. ¿Cuánto miden los lados del rectángulo?*

Problema 8. *Se necesitan 280 botellas para trasegar el vino de un barril.*

i) *¿Cuántos barriles se vaciarán en 910 botellas?*
ii) *¿Cuántos litros de vino contiene el barril si cada una de las botellas es de $\frac{3}{4}$ de litro?*

Problema 9. *Un poste del alumbrado público mide 4.8 metros. Si $\frac{2}{5}$ partes del poste están pintadas de blanco y $\frac{1}{3}$ de rojo, ¿cuál es la longitud (en metros) del poste que no se encuentra pintada?*

Problema 10. *¿Cuántos centímetros cúbicos deben quitarse de 425 decímetros cúbicos para obtener 25 centésimas de metro cúbico?*

Problema 11. *Encontrar una ecuación de segundo grado, cuyas raíces sean $\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}$.*

Problema 12. *Encontrar los valores de los dígitos v, w, y, z en la siguiente expresión:*

$$\begin{array}{r} wyz \\ \times wv \\ \hline 1ww7 \\ 2wzw \\ \hline 27w07 \end{array}$$

Problema 13. *¿Existirán dos números enteros que sumados den 2 y multiplicados -35?*

Problema 14. *Encontrar la octava parte de 2^{2006}.*

Problema 15.

i) *Encontrar el dígito w de manera que $751w$ sea divisible por 3.*
ii) *¿Cuándo un número de cuatro dígitos es divisible por 125?*
iii) *Encontrar los dígitos u, v, de manera que el número $7u34v$ sea divisible por 8.*

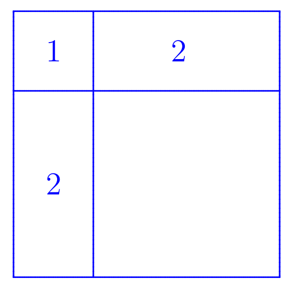
Problema 16. *Calcular el valor de a para el cual el polinomio:*

$$x^5 + ax^4 + 48$$

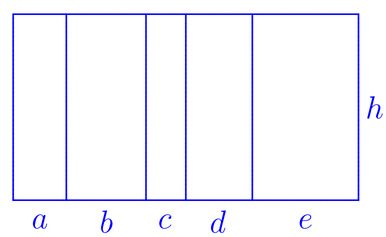
sea divisible por $x - 2$.

Problema 17. *Las edades actuales de Pedro, José y Alberto son números primos distintos. Pedro es menor que Alberto, y éste a su vez es menor que José. La suma de las edades de todos ellos es divisible por 17, la suma de las edades de los 2 mayores es menor a 90 y el menor tiene más de 23 años. Encontrar las edades de cada uno.*

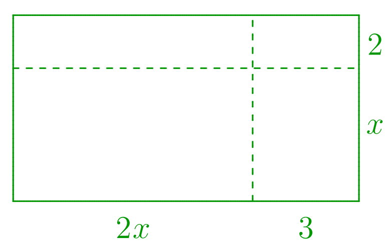
Problema 18.
El rectángulo de la figura está dividido en cuatro rectángulos más pequeños mediante dos segmentos de recta paralelos a sus lados. En tres de ellos se ha indicado el perímetro correspondiente. ¿Cuál es el perímetro del cuarto rectángulo y cuál es el perímetro del rectángulo completo?



Problema 19.
Un terreno rectangular se va a dividir en 5 lotes rectángulares de distinto ancho, como se indica en la figura. Obtener una expresión para el área total del terreno.



Problema 20.
Un terreno rectangular se ha dividido en 4 lotes rectángulares, como se muestra en la figura. Obtener el área del terreno como suma de las áreas de los 4 lotes.



Problema 21. *En un triángulo $\triangle$ABC, el ángulo B es el triple del ángulo A y el ángulo C es la suma de los otros dos ángulos. ¿Cuánto miden cada uno de los ángulos del triángulo.*

Problema 22. *Los lados de un triángulo son enteros consecutivos. Si el perímetro del triángulo es de 71 unidades, ¿cuánto mide cada lado?*

Problema 23. *Raquel tiene ahora* 12 *años más que Elisa. Dentro de* 4 *años la edad de Raquel será el doble de la edad de Elisa. ¿Cuáles son las edades actuales de Raquel y Elisa?*

Problema 24. *Con monedas de* 10 *y de* 5 *centavos se ha reunido* \$1.75 *en total. Si el número de monedas de* 10 *centavos es el doble del número de las de* 5 *centavos, encontrar:*

i) *El número de monedas de* 10 *centavos.*
ii) *El número de monedas de* 5 *centavos.*
iii) *El número total de monedas.*

Problema 25. *En una dulcería se tienen dos tipos de dulces, a saber, de* \$9 *y de* \$4 *el kilogramo respectivamente. ¿Qué cantidad de cada tipo de dulces se necesita para obtener* 100 *kg de una mezcla que deberá venderse a* \$6 *el kilogramo?*

Problema 26. *Un tren parte de la ciudad de México con una velocidad de* 60 *km/hr; hora y media después lo hace otro con una velocidad de* 75 *km/hr. Si el segundo tren viaja sobre una vía paralela a la del primero, ¿a qué distancia de la ciudad le dará alcance? ¿En qué tiempo lo hace?*

Problema 27. *Resolver e interpretar geométricamente los sistemas de ecuaciones siguientes:*

$$i)\ \begin{array}{c} 3x+2y=18 \\ 2x-7y=11 \end{array}, \quad ii)\ \begin{array}{c} x-y=3 \\ 3x-3y=9 \end{array}, \quad iii)\ \begin{array}{c} x-y=0 \\ 8x+5y=11 \end{array}.$$

Problema 28. *Encontrar los valores de a y de b de manera que el sistema:*

$$x-by=5$$
$$ax+by=0$$

tenga por solución $x=3$, $y=2$.

Problema 29. *Sea z un número de dos dígitos. La suma de los dos dígitos es 8 y si los dígitos se invierten su suma posicional excede en 18 unidades a la suma anterior. Encontrar el número z.*[1]

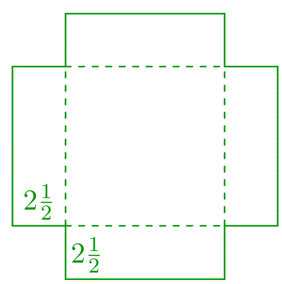
Problema 30. *Considérese el número de tres dígitos $vw5$. La suma de los tres dígitos es 12 y si se invierte el orden de los dígitos de las decenas y las centenas su suma posicional excede en 90 unidades a la suma anterior. ¿De qué número se trata?*

Problema 31. *En un triángulo isósceles, cada uno de los dos ángulos iguales excede en $15°$ a la mitad del tercer ángulo. Encontrar el valor de los tres ángulos del triángulo en cuestión.*

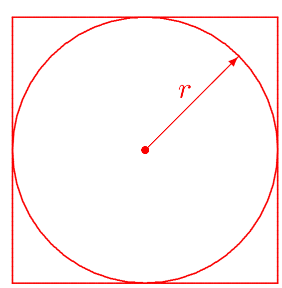
Problema 32. *¿Se puede descomponer el número 56 en la suma de dos números a, b de tal suerte que $a = b^2$?*

Problema 33. *La altura de un triángulo mide 4 metros más que su base y su área es de 16 m^2. ¿Cuánto miden la altura y la base del triángulo?*

Problema 34.
En cada esquina de una lámina cuadrada se ha recortado un pequeño cuadrado de $2\frac{1}{2}$ cm por lado, para formar con ella una caja rectangular sin tapa y con un vólumen de 90 cm^3. ¿Cuánto medía inicialmente el lado de la lámina?

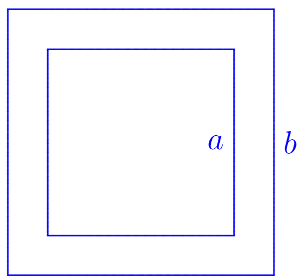


Problema 35.
De un pedazo cuadrado de cartón se ha recortado un disco, como se muestra en la figura. El área del cartón sobrante es de $10\frac{1}{2}$ cm^2. ¿Cuál es el radio del disco y cuál es el lado del cuadrado?



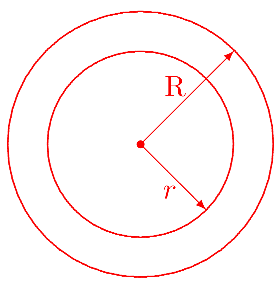
[1] Para resolver este problema y el siguiente, debe tener muy presente que nuestro sistema de numeración es posicional de base 10.

Problema 36.



Se desea construir un marco de madera con lado exterior b y lado interior a, como se muestra en la figura. Encontrar una fórmula para el área del marco y otra para el vólumen de madera necesario para construirlo, si se desea que el marco tenga un calibre c.

Problema 37.



Se desea construir un anillo de lámina con radio exterior R y radio interior r, como se muestra en la figura. Encontrar una fórmula para el área del anillo y otra para el vólumen de lámina necesario para construirlo, si se sabe que la lámina tiene un calibre c.

Problema 38. *La distancia del pie de una torre A, a un observador que se encuentra en el punto C es de $60\,m$. Si el ángulo con el que el observador mira la torre es de $26°$, encontrar la altura de la torre.*

Problema 39. *En el instante en que un avión pasa por la vertical de un tanque de agua situado en el punto A, un observador mira al avión desde un punto C, situado a $100\,m$ del tanque con un ángulo de $56°30'$. ¿A que altura volaba el avión en ese instante?*

Problema 40. *Andrés desea raptar a su novia, para lo cual planea utilizar una escalera para llegar a la ventana de la recámara de su novia que se encuentra situada a $2\,m$ de altura, sin embargo, tiene un pequeño problema, la anchura de la calle a la que da la ventana de su novia es de tan solo $1.35\,m$. ¿De qué longitud debe ser la escalera y con qué ángulo se apoya ésta contra la pared de la ventana de su novia, para lograr su propósito?*

Problema 41. *Al mediodía el profesor Sabino, mide la sombra que proyectan un arbusto vertical de 1.20 metros de altura y la torre de* *una iglesia. Encuentra que la sombra del arbusto mide* 1.05 *metros y la de la iglesia* 28 *metros. Enseguida el profesor Sabino pregunta a sus alumnos:*

- ♠ *¿Cuánto mide la torre de la iglesia?*
- ♠ *¿Es necesario hacer las mediciones al mediodía?*

CONCURSO PIERRE FERMAT 2006, GUÍA PARA NIVEL SUPERIOR

ESCUELA SUPERIOR DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS DEL I.P.N.

Problema 1.

$i)$ *Considerar los siguientes polinomios:*

$$q(x) = 4x^3 + 2x^2 + 7x + 1;$$
$$p(x) = 2x^2 + x + 6.$$

Justificar o refutar la siguiente afirmación:

$$4271 \times 216 = q(10) \cdot p(10).$$

$ii)$ *Considerar ahora los polinomios siguientes:*

$$p(x) = 1125x + 4361;$$
$$q(x) = 5776x + 2343.$$

Justificar o refutar la siguiente multiplicación:

$$11254361 \times 57762343 = p\left(10^4\right) \cdot q\left(10^4\right).$$ [1]

$iii)$ *Con un método similar al de los dos incisos anteriores calcular:*

$$26543645132 \times 27568374445.$$

Problema 2.

$i)$ *Demostrar que para toda $x > 0$, $\ln(x)$ no es un polinomio.*

$ii)$ *Demostrar que para todo número real x, $x^{1/3}$ no es un polinomio.*

[1] Le será útil recordar lo aprendido en la primaria: "Nuestro sistema numérico es posicional de base 10".

Problema 3. *Demostrar que para cualesquiera número natural k se tiene:*

$$(1+x)\left(1+x^2\right)\left(1+x^4\right)\cdots\left(1+x^{2^{k-1}}\right)=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{2^k-1}.$$

Problema 4.

i) *Encontrar la ecuación del* lugar geométrico *de los puntos medios de las cuerdas de la parábola $y=x^2+x+1$ que pasan por el origen. Dibujar el lugar geométrico.*

ii) *Encontrar la ecuación del lugar geométrico de los puntos en el plano, cuya distancia al punto $(-4,0)$ sea igual a la distancia del punto a la recta de ecuación paramétrica $\vec{x}=t\,(0,1)$. Dibujar el lugar geométrico.*

Problema 5.

i) *Encontrar las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto $(2,3)$ y forman un triángulo equilátero con la recta de ecuación $x-6y+3=0$.*

ii) *Demostrar que existe una infinidad de pares de rectas que pasan por el punto $(2,3)$ y que forman un triángulo isósceles con la recta de ecuación $x-6y+3=0$.*

Problema 6. *Encontrar las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto $(2,3)$ y que forman un triángulo rectángulo con la recta de ecuación $x-6y+3=0$.* Observar que existen dos maneras de resolver el problema, una es colocando el vértice del ángulo recto del triángulo en el punto $(2,3)$; la otra es eligiendo como uno de los catetos del triángulo a la recta perpendicular a la recta de ecuación $x-6y+3=0$ y que pasa por el punto $(2,3)$. Nótese que en ambos casos la solución no es única, de hecho, en ambos casos se genera una infinidad de soluciones.

Problema 7. *Sean L_1, L_2 dos rectas en el plano que se intersectan en el punto P. Demostrar que para cualquier punto Q que se escoja en cualquiera de la bisectrices de las rectas, existen puntos P_1 en L_1 y P_2 en L_2 de manera que los triángulos $\triangle\mathrm{PP}_1\mathrm{Q}$, $\triangle\mathrm{PQP}_2$ son congruentes.*

Problema 8. *Demostrar el* TEOREMA DE STEINER–LEHMUS*: Si un triángulo tiene dos bisectrices de igual longitud, entonces es isósceles.*

Problema 9. *Sea $2a$ el perímetro de un triángulo y sea m la suma de las longitudes de sus tres medianas. Demostrar que:*

$$\frac{3a}{2} \leq m \leq 2a.$$

Problema 10. *Demostrar que si dos medianas de un triángulo tienen la misma longitud, entonces el triángulo es isósceles.*

Problema 11. *Demostrar que las elipses*

$$\begin{aligned} &b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0, \\ &a^2x^2 + b^2y^2 - a^2b^2 = 0, \quad a \neq b. \end{aligned}$$

se cortan en cuatro puntos concíclicos. Encontrar el centro y el radio de la circunferencia que los contiene.

Problema 12. *La órbita de nuestro planeta es una elipse que tiene al sol en uno de sus focos, la longitud del eje mayor es de $2.99 \times 10^8 km$ y la excentricidad es de 1.67×10^{-2}. ¿Cuáles son las distancias mínima y máxima de la tierra al sol?*

Problema 13. *Dado el siguiente arreglo de números:*

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & & & & & & & & \\
2 & 3 & 4 & & & & & & \\
3 & 4 & 5 & 6 & 7 & & & & \\
4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & & \\
5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
n & n+1 & n+2 & \cdots & & & & \cdots & \cdots
\end{array}$$

Demostrar que la suma de los números en cada renglón es el cuadrado de un número impar.

Problema 14. *¿El número:*

$$\frac{1}{10}+\frac{2}{10^2}+\frac{3}{10^3}+\frac{4}{10^4}+\frac{5}{10^5}+\cdots,$$

es irracional o racional?

Problema 15. *Encontrar cinco números racionales a, b, c, d, e, de manera que:*

$$\sum_{k=1}^{n} k^4 = an^5+bn^4+cn^3+dn^2+en \quad \text{para cada número entero } n.$$

Sugerencia: Calcular previamente $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+1)^4-\sum_{k=1}^{n}k^4$.

Problema 16. ***¿Verdadero o falso?:***

$i)$ $0.1001001010000111 < 0.10001011111$.

$ii)$ $0.01010101010 > 11011011011011$

Problema 17. *Demostrar que los siguientes números son irracio–nales:*

$i)$ $0.101001000100001000000\cdots$.

$ii)$ $0.102003000400005000006000000700000008000000000\cdots$.

Problema 18. *Demostrar que entre cualesquiera dos números reales a, b, con $a < b$ existe un número racional de la forma $\dfrac{m}{2^k}$,*[2] *para algún número entero m y algún número natural k, es decir:*

$$a < \frac{m}{2^k} < b.$$

Por ejemplo, encontrar un tal número entre 1.4 y $\sqrt{2}$.

Sugerencia: El problema puede reducirse al caso $0 < a < b < 1$, ¿porqué?

[2] Los números de esta forma reciben el nombre de **números racionales diádicos**. De hecho, si en vez de 2, se considera cualquier otro número primo p, el resultado sigue siendo válido, recibiendo tales números el nombre de **números racionales p–ádicos**.

Problema 19.

i) *<u>Obtener</u> la suma de los n primeros números naturales.*

ii) *<u>Obtener</u> la suma de los n primeros números naturales impares.*

iii) *<u>Obtener</u> la suma de los n primeros números naturales pares.*

Sugerencia: Observar que en el inciso (i) se pide la suma de la "progresión aritmética":

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad \dots \quad n,$$

de razón 1. En los otros incisos, también se pide la suma de ciertas progresiones aritméticas.

Problema 20.

i) *<u>Obtener</u> la suma de los cubos de los n primeros números naturales.*

ii) *<u>Obtener</u> la suma de las potencias cuartas de los n primeros números naturales.*

Sugerencia: Para resolver el inciso (i), considérese la identidad:

$$(1+k)^4 = k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 1.$$

Evaluar esta identidad para $k = 0, 1, 2, \dots, n$, sumar, simplificar y des–pejar. Para resolver el inciso (ii), utilizar un procedimiento semejante.

Problema 21. *Sea:*

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad \dots \quad a_n,$$

una "progresión geométrica" *de* "razón" r.

i) *Demostrar que la razón r de la progresión geométrica es:*

$$r = \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}}\ .$$

ii) *Demostrar que la suma* S*, de la progresión geométrica es:*

$$\frac{a_n r - a_1}{r-1}\,.$$

Problema 22. *Si los términos de la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *están en progresión geométrica de razón* r*, entonces enumerar los casos en los cuales la serie es divergente o convergente.*

Problema 23. *Demostrar que la* expansión decimal periódica*:*

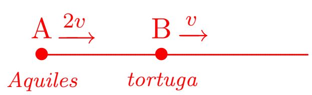
$$0.\overline{a_1 a_2 a_3 \cdots a_n} = 0.a_1 a_2 a_3 \cdots a_n a_1 a_2 a_3 \cdots a_n \cdots \ ,$$

es equivalente a la fracción:

$$\frac{a_1 a_2 a_3 \cdots a_n}{999 \cdots 9} \ ,$$

en donde, el número de nueves en el denominador de la fracción es n*.*

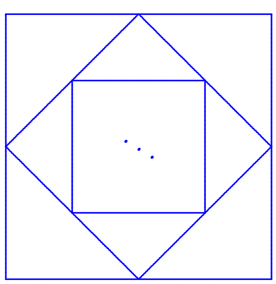
Problema 24. *¿Es posible traducir, a una progresión geométrica, la paradoja de Zenón sobre Aquiles y la tortuga?:*



Si Aquiles, con el doble de velocidad que la tortuga, parte del punto A, al mismo tiempo que la tortuga lo hace del punto B, entonces nunca podra alcanzar a la tortuga.

Si su respuesta es afirmativa, construya la progresión y explique me– diante ésta la paradoja.

Problema 25.



Uniendo con segmentos de recta los puntos medios de un cuadrado de 8 unidades de lado, se obtiene un cuadrado inscrito en el primero. Repitiendo el procedimiento con el segundo cuadrado, se obtiene un tercer cuadrado ins– crito en el segundo y así sucesivamente, "ad infinitum".

i) Encontrar las áreas de los seis primeros cuadrados de la suce- sión.

ii) *Encontrar el término general de la sucesión de áreas de los cuadrados.*

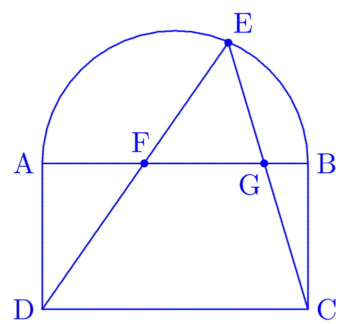
iii) *Encontrar el término general de la sucesión del lado de los cuadrados.*

iv) *¿A dónde converge la sucesión de áreas de los cuadrados?*

v) *Calcular la suma de las áreas de todos los cuadrados.*

Problema 26.

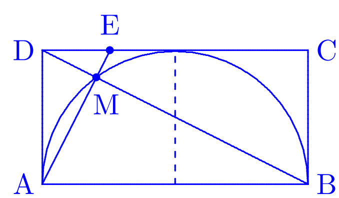
Demostrar el Teorema de Fermat*: Sea* $\square$ABCD *un rectángulo tal que* $\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{2}\,\overline{\mathrm{BC}}$. *Sea* E *un punto sobre la semi–circunferencia de diámetro* AB *y sean* F, G *los puntos de intersección de los segmentos* DE *y* CE *con el segmento* AB*, respectivamente. Entonces:*



$$\overline{\mathrm{AG}}^{2} + \overline{\mathrm{BF}}^{2} = \overline{\mathrm{AB}}^{2}.$$

Problema 27.

La longitud de la base AB *del rectángulo* $\square$ABCD *es el doble de su altura* $\overline{\mathrm{BC}}$. *Sobre el segmento* DC *se escoge el punto* E *de manera tal que* $\overline{\mathrm{DE}} = \frac{1}{4}\overline{\mathrm{AB}}$. *Demostrar que la diagonal* DB *del rectángulo* $\square$ABCD *y el segmento* AE *se intersectan en el punto* M *perteneciente a la semi–circunferencia con diámetro* AB. *¿Es el ángulo* $\angle$AMB *recto?*



Problema 28. *Demostrar la* Fórmula de Brahmagupta*: si* a, b, c, d *son las longitudes de los lados de un cuadrilátero* ABCD *inscrito en una circunferencia de radio* r, *entonces el área del cuadrilátero es:*

$$\text{área} = \sqrt{(p-a)\,(p-b)\,(p-c)\,(p-d)}\ ,$$

en donde, $p = \dfrac{a+b+c+d}{2}$. *¿Es posible generalizar esta fórmula a un polígono de* n *lados?*

Problema 29. *Demostrar que la* "ecuación general" *de la recta que pasa por los puntos* (x_1, y_1), (x_2, y_2), *es:*

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 .$$

Deducir que tres puntos distintos (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), *en el plano son* "colineales" *si y sólo si*

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 .$$

Problema 30. *Sea* a *un número real, con* $a \neq 0$. *Considerar el triángulo con vértices* $(0,0)$, $(a,0)$ *y* $(0,a)$.

$i)$ *Encontrar la ecuación general de las hipérbolas equiláteras circunscritas al triángulo dado.*

$ii)$ *Demostrar que el lugar geométrico de los puntos en el plano, de los centros de las hipérbolas del inciso* (i) *es una circunferencia. Encontrar su centro y su radio.*

Problema 31.

$i)$ *Demostrar que el área encerrada por la elipse:*

$$\mathcal{E} : \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 ,$$

es:

$$\pi \, a \, b .$$

Sugerencia: *Demostrar que la aplicación lineal* $\mathrm{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, *dada por la fórmula:*

$$\mathrm{T}\,(x, y) = \left(x, \frac{a}{b}\, y \right) ,$$

transforma la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$ *en la elipse* $\mathcal{E}$. *Deducir entonces la fórmula pedida.*

ii) *Demostrar que si la elipse* $\mathcal{E}$, *tiene ecuación:*

$$\mathrm{A}x^2 + \mathrm{B}xy + \mathrm{C}y^2 = 1,$$

con semiejes λ_1, λ_2, *entonces:*

$$\text{área}\,(\mathcal{E}) = \frac{\pi}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\mathrm{B}^2 - 4\mathrm{AC}}}\,.$$

Problema 32. *Encontrar el punto de la cónica* $y^2+4y-64x-5=0$ *más cercano a la recta* $4x+3y-14=0$.

Problema 33. *Suponer que* n *es un número natural mayor que* 2. *Demostrar que que el númro:*

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+\cdots+n$$

no es un número primo.

Problema 34. *Encontrar* <u>*todas*</u> *las parejas de números enteros* m, n *tales que:*

$$m^3 - n^3 + m^2 n - mn^2 = 3123.$$

Problema 35. *Encontrar tres números enteros* ℓ, m,n *tales que:*

$$\ell < m, \qquad \ell + m + n = 40, \qquad \ell^2 + m^2 = n^2.$$

Problema 36. *Demostrar que* 2006 *no se puede expresar como la suma de los cuadrados de* 2 *números enteros.*

Problema 37. *Sea* p *un número primo impar distinto de* 11, *demostrar que:*

$$p^{20} - 1$$

es divisible por 18837.

Problema 38.

i) *Demostrar que si el número natural* k *es un cuadrado, entonces su residuo al dividirlo entre* 8 *es* 0, 1 *o* 4.

ii) *Demostrar que la suma de los cuadrados de 1988 enteros consecutivos no puede ser un cuadrado.*

Sugerencia: *Sea s la suma de los cuadrados de 1988 enteros consecutivos, entonces* $s = \sum_{j=1}^{1988} (a+j)^2$. *Desarrollar el binomio al cuadrado y aplicar el inciso (i).*

Problema 39. *sea n un número entero > 1. Demostrar que n es un número primo o tiene un factor primo $\leq \sqrt{n}$.*

Problema 40. *Sea n un número entero positivo. Demostrar que $\binom{2n}{n}$ es divisible por cualquier número primo tal que $n < p < 2n$.*[3]

Problema 41. *Considérese la siguiente expansión decimal:*

$$\alpha = 0.110001000000000000000001\ldots \quad .$$

Demostrar que:

i) $\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}}$

ii) $\alpha \notin \mathbb{Q}$.[4]

Problema 42. *Demostrar que para cada número real r, existe un número entero k, tal que:*

$$k < r < k+1.$$

Problema 43. *Considérese la sucesión de números reales $(a_n)_n$, con término general:*

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n).$$

Utilizando el hecho de que $\int \frac{dx}{x} = \ln(x)$, *dar una "demostración geo–métrica" de que la sucesión $(a_n)_n$, es convergente.*[5]

---

[3] Aquí $\binom{2n}{n}$ denota el número binomial $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!\,(2n-n)!}$.

[4] El número α recibe el nombre de **número de Liuville**.

[5] El límite de esta sucesión se denota por γ y recibe el nombre de **constante de Euler**. Hasta la fecha se ignora si γ es un número racional o irracional.

Problema 44. *Demostrar que la suma de la serie:*

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\cdots$$

es $\frac{1}{2}\ln(2)$.

Sugerencia: Demostrar primero que la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n},$$

es convergente.

Problema 45. *El entero* 17 *divide a* 20604, 53227, 25755, 20927 *y* 78421. *Demostrar que el determinante:*

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 6 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 7 & 5 & 5 \\ 2 & 0 & 9 & 2 & 7 \\ 7 & 8 & 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

es divisible por 17.[6]

Problema 46. *Demostrar que:*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \cdots & 2^{n-1} \\ 1 & 3 & 3^2 & \cdots & 3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & n & n^2 & \cdots & n^{n-1} \end{vmatrix} = 1!2!3!\cdots(n-1)!\,.$$

Problema 47. *Sean* (a_1,b_1), (a_2,b_2), (a_3,b_3), (a_4,b_4), *cuatro puntos distintos del plano tales que tomados por ternas no son colineales.*

[6]**No debe desarrollar** el determinante, la demostración debe ser llevada a cabo utilizando únicamente propiedades de los determinantes.

Demostrar que los cuatro puntos dados son concíclicos si y sólo si

$$\begin{vmatrix} a_1^2+b_1^2 & a_1 & b_1 & 1 \\ a_2^2+b_2^2 & a_2 & b_2 & 1 \\ a_3^2+b_3^2 & a_3 & b_3 & 1 \\ a_4^2+b_4^2 & a_4 & b_4 & 1 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Problema 48. *Sea $(a_n)_n$ la sucesión de números reales definida de la siguiente manera:*

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad \ldots, \quad a_n = \frac{a_{n-2}+a_{n-1}}{2}\,, \quad \ldots$$

Demostrar que existen dos progresiones geométricas A, B *tales que:*

$$a_n = \frac{1}{3}\mathrm{A} + \frac{4}{3}\mathrm{B}, \quad \textit{para cada número natural } n.$$

Utilizando este hecho, deducir que la sucesión converge y que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{2}{3}\,.$$

Problema 49. *Sea $(b_n)_n$ la sucesión de números reales definida de la siguiente manera:*

$$b_1 = 1, \quad b_2 = 1, \quad \ldots, \quad 6\,b_{n+2} = 5\,b_{n+1} - b_n, \quad \ldots$$

Encontrar el término general de la sucesión y calcular su límite, demostrando previamente que la sucesión es convergente.

Problema 50. *Encontrar una sucesión de números racionales que converja a $\sqrt{2}$. Discurrir un método para localizar graficamente $\sqrt{2}$ en la recta real.*

Problema 51. *Suponer que n y k son números naturales primos relativos y mayores que 1. Demostrar que:*

$$\lim_{x\to k} \frac{x^n - k^n}{x-k} = nk^{n-1}.$$

Problema 52. *Calcular los límites siguientes*

i) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{1+2^{1/x}}\,.$

Resp. 0.

$ii)$ $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+2\tan(x)} - e^{x} + x^{2}}{\operatorname{arc\,sen}(x) - \operatorname{sen}(x)}$.

Resp. 2.

$ii)$ $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{\arctan(x)} - \dfrac{1}{1-x} + \dfrac{x^{2}}{2}}{\ln \dfrac{1+x}{1-x} - 2x}$.

Resp. $-\dfrac{7}{4}$.

Justificar cada una de las respuestas.

Problema 53. *Dibujar el gráfico de la función* $f(x) = \dfrac{x^{2}-4}{x-2}$, *en el intervalo* $[0, 5]$. *¿Cuál es el dominio de la función* f*? ¿La función* f *es continua en* 2*?*

Problema 54. *Denotemos por* $\mathbb{Q}$ *al conjunto de los* números racio– nales *y por* $\mathbb{R}$ *al conjunto de los* números reales.

$i)$ *Sea* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *la función definida por:*

$$\varphi(x) = \begin{cases} x^{2} - 3 & si \;\; x \in \mathbb{Q} \\ x - 5 & si \;\; x \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Demostrar que φ *es discontinua en todo* $\mathbb{R}$.

$ii)$ *Demostrar que la función* $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *definida por:*

$$\psi(x) = \begin{cases} \dfrac{5}{x-1} & si \;\; x \in \mathbb{Q} \\ x - 1 & si \;\; x \notin \mathbb{Q} \end{cases},$$

tiene exactamente dos puntos de continuidad en $\mathbb{R}$. *¿Qué puntos son estos?*

Problema 55.

i) *Sea* $(b_n)_n$ *una sucesión de números reales con término general:*

$$b_n = \begin{cases} 0 & si \;\; n < 10^{57} \\ 1 & si \;\; 10^{57} \leq n < 10^{101} \end{cases} .$$

¿Tiene límite la sucesión?

ii) *Sea* $(c_n)_n$ *una sucesión de números reales con término general:*

$$c_n = \begin{cases} 0 & si \;\; n < 10^{9} \\ 1 & si \;\; 10^{9} \leq n < 10^{69} \\ 2 & si \;\; n \geq 10^{69} \end{cases} .$$

¿Tiene límite la sucesión? En caso afirmativo, ¿cuál es el límite de la sucesión?

Problema 56.

i) *Demostrar que:*

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} .$$

ii) *Demostrar las igualdades siguientes:*

$$\cos\left(\frac{\pi}{16}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} ,$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{16}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} .$$

Problema 57.

i) *Demostrar que* $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ *es una solución de la ecuación cuadrática* $x^2 - x - 1 = 0$.

ii) *Sea $(a_n)_n$ la sucesión de números reales definida de la manera siguiente:*

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \sqrt{1+\sqrt{1}}, \quad a_3 = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}, \quad \cdots$$
$$\cdots, \quad a_{n+1} = \sqrt{1+a_n}, \quad \cdots$$

Demostrar que $(a_n)_n$ es convergente y que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$.

iii) *Deducir que $\alpha = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}$.*

iv) *Deducir que α no es un número racional.*

Problema 58. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por:*

$$f(x) = \left\lfloor \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2} \right\rfloor.^{7}$$

Encontrar y clasificar las discontinuidades de f.

Problema 59. *Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función, tal que para todo $y \in f([0,1])$ existen exactamente dos puntos x_1, $x_2 \in [0,1]$ tales que $f(x_1) = y = f(x_2)$. Demostrar que f no puede ser continua.*

Problema 60. *Sean $a_0, a_1, \ldots, a_n$ números reales que cumplen la condición:*

$$\frac{a_0}{1} + \frac{a_1}{2} + \cdots + \frac{a_n}{n+1} = 0.$$

Demostrar que el polinomio $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ tiene al menos una raíz real.

Problema 61. *Sea g una función derivable, con derivada continua en todo el conjunto de los números reales y que cumple:*

i) $g(0) = 0$.

ii) $|g'(x)| \leq |g(x)|$ *para todo número real x.*

Demostrar que $g(x) = 0$ para todo número real x.

Problema 62. *Dibujar el gráfico de las siguientes funciones (incluidas sus asíntotas, si las hubiere):*

---

[7] Recuerde que los corchetes $\lfloor\ \rfloor$ denotan la *parte entera*.

i) $f(x) = \dfrac{x^2}{1-|x|}$

ii) $g(x) = \dfrac{2|x^3| - 3x^2}{(|x|-1)^2}$

iii) $\ell(x) = \sqrt[4]{x^4 + x^3}$

Problema 63. *Considérese la función $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ siguiente:*

$$h(x) = \sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}$$

Demostrar que la función h es continua en todo el conjunto de los números reales y que tiene un mínimo (local) en el único punto donde no es derivable. Dibujar el gráfico de la función.

Problema 64. *Sean f, g funciones continuas en $[0,1]$ tales que $f(x) \in [0,1]$ para toda $x \in [0,1]$, $g(0) = 0$ y $g(1) = 1$. Demostrar que existe $c \in [0,1]$ tal que $g(c) = f(c)$. Demostrar que se cumple lo mismo si se invierten los valores que toma g en los extremos del intervalo $[0,1]$, esto es, si $g(0) = 1$ y $g(1) = 0$.*

Problema 65. *Demostrar que no existe ninguna función continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que tome exactamente dos veces el valor de cada número real.*

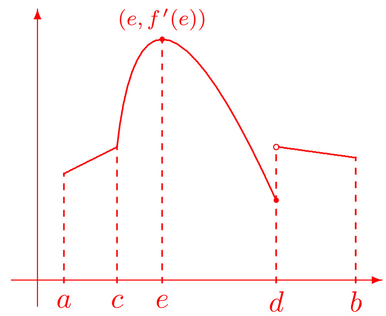
Problema 66. *Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función dos veces derivable en 0 y tal que $g(0) = g'(0) = 0$. Defínase la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la manera siguiente:*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{g(x)}{x} & si \;\; x \neq 0 \\ 0 & si \;\; x = 0 \end{cases}.$$

Demostrar que f es derivable en 0 y encontrar $f'(0)$.

Problema 67. *Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$ y n veces derivable en (a,b). Supóngase que existen $n+1$ puntos distintos $x_1,x_2,\ldots,x_{n+1}$ en el intervalo (a,b), tales que $f(x_i)=0$ para cada $i=1,2,\ldots,n+1$. Demostrar que $f^{(n)}(c)=0$ para algún $c\in(a,b)$.*

Problema 68.



En la figura, se muestra el gráfico de la función derivada de una función continua $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. ¿Qué puede decir acerca de la diferenciabilidad de f en los puntos c y d?. ¿En que puntos del intervalo $[a,b]$ la función derivada f' no es diferenciable?. Si en el punto e existe un punto máximo de f', entonces ¿qué tipo de singularidad tiene f en e?. Puede trazar el gráfico de f a partir del gráfico de f'?. Justificar ampliamente sus respuestas.

Problema 69. *Encontrar el valor de c que minimice los máximos de la función:*

$$f(x)=\left|x^2-c\right|$$

en el intervalo $[-1,1]$.

Problema 70. *Encontrar los valores de a y de b que hagan que la función:*

$$g(x)=\frac{ax+b}{(x-1)(x-4)}$$

tenga un máximo local en el punto $(2,-1)$.

Problema 71. *Encontrar el término más grande de la sucesión de números reales $(a_n)_n$, cuyo término general es:*

$$a_n=\frac{\sqrt{n}}{n+10{,}000}\,.$$

Problema 72. *Sea $j:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función dada por:*

$$j(x)=\frac{x^3}{1-|x|}\,.$$

i) ***¿Verdadero o falso?:***

a) *j es continua en 0.*

b) *j es derivable en 0.*

ii) *Graficar completamente la funciones j y j'.*

iii) *¿Existirá algún intervalo abierto de números reales, en donde la función j sea derivable con derivada continua?*

Problema 73. *Demostrar que la función:*

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$$

tiene tres puntos de inflexión y que estos, son colineales.

Problema 74. *Considérese la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por:*

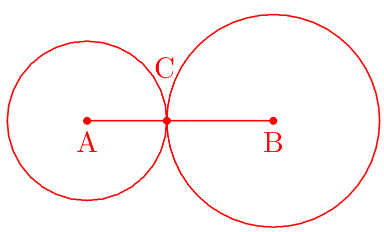
$$f(x) = \begin{cases} x^4 \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) & si \;\; x \neq 0 \\ 0 & si \;\; x = 0 \end{cases}.$$

Demostrar que 0 es un punto crítico de la función, pero que no es ni máximo, ni mínimo, ni punto de inflexión. ¿Por qué?

Problema 75. *De entre todos los triángulos rectángulos de hipotenusa 1, ¿cuáles son las longitudes de los catetos del de área máxima?*

Problema 76. *Encontrar las longitudes de los lados del triángulo circunscrito a la circunferencia de radio r, que tenga área máxima.*

Problema 77.



Encontrar el punto C sobre el segmento de recta AB de manera que la suma de las áreas de las circunferencias de centro A con radio $\overline{\mathrm{AC}}$ y de centro B con radio $\overline{\mathrm{CB}}$, sea máxima.

Problema 78. *Encontrar el triángulo de perímetro máximo que tenga área 4 y base 2.*

Problema 79. *Sea* $\mathrm{F} = \left\{ \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{1}{2}, \frac{5}{8}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8} \right\}$ *y sea* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, *la función definida por:*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si \;\; x \in \mathrm{F} \\ 2x & si \;\; x \in \left[0, \frac{1}{2}\right) - \mathrm{F} \\ -2x+2 & si \;\; x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right] - \mathrm{F} \end{cases}$$

Demostrar que f *es integrable sobre* $[0,1]$ *y encontrar el valor de* $\int_0^1 f$.

Sugerencia: Dibujar el gráfico de f.

Problema 80. *Demostrar que la función* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$,[8] *dada por la fórmula:*

$$f\,(x) = \begin{cases} 0 & si \;\; x = 0 \\ \frac{1}{n} & si \;\; \frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}, \;\; n \in \mathbb{N} \end{cases},$$

es integrable en $[0,1]$ *y que:*

$$\int_0^1 f = \frac{1}{6}\pi^2 - 1 \, .$$

Problema 81.

i) *Considérese la función* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, *definida por la fórmula:*

$$f\,(x) = \begin{cases} 1 & si \;\; \frac{1}{n+1} < x < \frac{1}{n}, \;\; n \in \mathbb{N} \\ 0 & si \;\; x = 0 \;\; o \;\; x = \frac{1}{n} \;\; para\ alg\acute{u}n \;\; n \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

Demostrar que f *es integrable en* $[0,1]$ *y encontrar* $\int_0^1 f$.

[8]En este problema y en el siguiente, $\mathbb{N}$ denota al conjunto de los **números naturales**, es decir, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$.

ii) *Considérese la función* $g : [0,1] \to \mathbb{R}$*, definida por la fórmula:*

$$g(x) = \begin{cases} 1 & si \;\; x = \dfrac{1}{n} \;\; para\ algún \;\; n \in \mathbb{N} \\ 0 & si \;\; x \neq \dfrac{1}{n} \;\; para\ toda \;\; n \in \mathbb{N} \end{cases} .$$

Demostrar que g *es integrable en* $[0,1]$ *y encontrar* $\displaystyle\int_0^1 g$.

Problema 82. *Sea* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *una función continua y tal que* $f(x) \geq 0$ *para toda* $x \in [a,b]$*. Demostrar que si* $\displaystyle\int_a^b f = 0$*, entonces* $f(x) = 0$ *para toda* $x \in [a,b]$*. ¿Es cierto esto suponiendo* f *únicamente integrable en* $[a,b]$*?*

Problema 83. *Sea* $f(x) = \dfrac{3x^2}{\sqrt{1+x}}$*. Demostrar que:*

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \int_0^1 f \leq 1 .$$

Deducir que:

$$\frac{x^2}{\sqrt{2}} \leq \frac{x^2}{\sqrt{1+x}} \leq x^2 \quad Para\ toda\ x \in [0,1].$$

Advertencia: Estas demostraciones deben de ser llevadas a cabo, sin calcular la integral.

Problema 84. *Sea* F *la función definida por la fórmula:*

$$\mathrm{F}(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1+t^3}} .$$

Encontrar:

i) *El dominio de* F.

ii) *El dominio de continuidad de* F.

iii) *El dominio de diferenciabilidad de* F.

iv) $\mathrm{F}'(x)$*, en donde exista.*

Dibujar el gráfico de F.

Problema 85. *Calcular las siguientes integrales:*

$$i)\quad \int \frac{x^{11}}{\sqrt{x^6-1}}\,dx\,, \qquad ii)\quad \int \frac{(3x+5)\,dx}{x^3-x^2-x+1}\,,$$

$$iii)\quad \int \frac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2}\,dx\,, \qquad iv)\quad \int x^3\sqrt{x^2-1}\,dx\,,$$

$$v)\quad \int \frac{\sqrt{x^2-16}}{x^4}\,dx\,, \qquad vi)\quad \int \frac{\sec x}{\sec x-\tan x-1}\,dx\,,$$

$$vii)\quad \int \frac{\operatorname{sen} 2x}{2+\cos x}\,dx\,, \qquad viii)\quad \int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx\,.$$